VARIABLENAGGREGATION IN ÖKONOMETRISCHEN MODELLEN

DISSERTATION

zur Erlangung des Grades

eines Doktors der Wirtschaftswissenschaften

der Rechts- und Wirtschaftswissenschaftlichen Fakultät

der Universität des Saarlandes

(doctor rerum politicarum)

KLAUS REEH

1975

VARIABLENAGGREGATION IN ÖKONOMETRISCHEN MODELLEN

DISSERTATION

zur Erlangung des Grades

eines Doktors der Wirtschaftswissenschaften

der Rechts- und Wirtschaftswissenschaftlichen Fakultät

der Universität des Saarlandes

(doctor rerum politicarum)

KLAUS REEH

Tag der Disputation	:	24. Juni 1975
Dekan	:	Prof. Dr. Otto H. Poensgen
Erstberichterstatter	:	Prof. Dr. Hans Schneeweiß
Zweitberichterstatter	:	Prof. Dr. Volker Steinmetz

aku- Fotodruck, 86 Bamberg, Färbergasse 8 R

Variablenaggregation in ökonometrischen Modellen

	Seite
1 Problemstellung und Motivation	1
2 Grundlagen	3
2.1 Spezifikation ökonometrischer Modelle	3
2.2 Aggregation ökonomischer Variablen	9
2.2.1 Aggregation über ökonomische Einheiten	9
2.2.2 Aggregation über die Zeit	16
2.3 Ökonometrische Modelle mit aggregierten Variablen	20
Exkurs: Ein Spezifikationsproblem	
3 Schätzung und Test	24
3.1 Schätzung der E-Struktur	24
3.1.1 Beispiele	24
Exkurs: Ein weiteres Spezifikationsproblem	
3.1.2 Allgemeine Schätzung	34
3.1.3 Ein spezielles Schätzproblem	37
3.2 Schätzung der V-Struktur	45
3.2.1 Beispiele	45
3.2.2 Allgemeine Schätzung	53
3.3 Test der E-Struktur	60
3.3.1 Beispiele	60
3.3.2 Allgemeiner Test	71
3.4 Test der V-Struktur	77
3.4.1 Beispiele	77
3.4.2 Allgemeiner Test	83
4 Degregation	84
4.1 Degregation bei bekannter Struktur	84
4.2 Degregation bei zu schätzender Struktur	86

Seite

5 Prognose 94

5.1 Spezifikation ökonometrischer Prognosemodelle 94

5.2 Prognoseschätzung 96

6 Zusammenfassung und Erweiterung 98

UNIV.
LEIDEN
BIBL.

1. Problemstellung und Motivation

Die empirische Überprüfung von Theorien über ökonomische Phänomene, eine erste Aufgabe der Ökonometrie, ist, verglichen etwa mit der empirischen Überprüfung von Theorien über physikalische oder auch biologische Phänomene, ein recht schwieriges Unterfangen. Entsprechend gestaltet sich natürlich auch die Quantifizierung ökonomischer Theorien, eine weitere Aufgabe der Ökonometrie, relativ schwierig. Als Gründe für die erhöhten Schwierigkeiten sind zum einen die relativ geringe Präzision ökonomischer Theorien, zum anderen die mit der empirischen Erfassung ökonomischer Phänomene verbundenen Probleme zu nennen. Während es jedoch müßig ist, sich Gedanken darüber zu machen, welche Anforderungen an die ökonomische Theorie bzw. die Daten zu stellen sind, damit sich die Aufgaben der Ökonometrie leichter lösen lassen, erscheint es sinnvoll, sich zu überlegen, wie sich die meist nicht zu beseitigenden "Mängel" der Theorien bzw. Daten auf die Aussagen der Ökonometrie auswirken, und wie es überhaupt möglich ist, trotz dieser "Mängel" noch Aussagen zu erhalten.

Die geringe Präzision ökonomischer Theorien bewirkt, daß das ökonometrische Modell, das der Theorie angemessen ist, nicht durch diese Theorie eindeutig vorgeschrieben ist. Die damit verbundenen Probleme, Spezifikationsprobleme, sollen jedoch nicht Gegenstand dieser Arbeit sein, vielmehr wird in dieser Arbeit meist davon ausgegangen werden, daß ein der Theorie adäquates Modell spezifiziert worden ist. Untersucht werden also nur Probleme, die sich aus der oben erwähnten empirischen Erfassung der ökonomischen Phänomene ergeben.

Eine Vielzahl von Problemen aus diesem Bereich wurden schon eingehend in der Literatur erörtert. Man denke etwa an die Probleme, die entstehen, wenn die durch die Theorie vorgeschriebenen Variablen nur fehlerhaft beobachtbar sind oder Erwartungen beschreiben sollen, also nicht unmittelbar beobachtet werden können. Wenig Beachtung wurde jedoch Problemen geschenkt, die damit verbunden sind, daß nur aggregierte Variable, nicht jedoch die durch die Spezifikation und somit durch die Theorie vorgeschriebenen ursprünglichen Variablen

beobachtet werden. Es sind dies Probleme, die entstehen, wenn etwa statt einer monatlichen nur eine vierteljährliche Beobachtung der Variablen durchgeführt werden kann, wenn statt der Beobachtungen von Individuen nur Beobachtungen von Individuengruppen zugänglich sind.

Die Literatur nun, die diese Art von Problemen zum Inhalt hat, ist schnell aufgezählt. Es sind dies unter mehr theoretischem Aspekt vor allem die Arbeiten von Prais und Aitchison (1955) sowie Haitovsky (1973) und unter mehr empirischem Aspekt die Arbeiten von Cramer (1964), Zellner und Montmarquette (1971) sowie Chow und Lin (1971). Auch wenn für diese Aufzählung nicht der Anspruch auf Vollständigkeit erhoben wird, so fällt doch neben ihrer Kürze auf, daß sie keine der Arbeiten von Theil enthält. Erklären läßt sich dies dadurch, daß bei Theil und den meisten anderen Autoren, die sich mit dem sogenannten Aggregationsproblem beschäftigt haben, nicht das Problem der Variablen- und dadurch implizierten Modellaggregation, sondern ein durch Variablenaggregation impliziertes Spezifikationsproblem im Vordergrund steht.[1)]

Mit dieser Arbeit wird nun der Versuch unternommen, diejenigen Probleme möglichst umfassend darzustellen, die auftreten, wenn an die Stelle der durch die ursprüngliche Spezifikation des ökonometrischen Modells geforderten unaggregierten Variablen aggregierte Variablen treten müssen, weil nur diese beobachtet worden sind. Es sind die Probleme, die zum einen das Modell selbst, seine Spezifikation und Identifikation, betreffen und die zum anderen die durch eine Anwendung des ökonometrischen Instrumentariums auf die vorliegenden Daten unter Zugrundelegung des entsprechenden Modells zu gewinnenden Ergebnisse, die Parameterschätzungen, Hypothesentests und Prognosen, berühren. Vorab jedoch ist es notwendig, um eine einheitliche Behandlung der angesprochenen Probleme zu ermöglichen, einige grundsätzliche Bemerkungen zu machen, die sich zum einen auf die im Rahmen dieser Arbeit betrachteten ökonometrischen Modelle, zum anderen auf die untersuchte Aggregation beziehen.

---

1) vgl. Abschnitt 2.3 und 3.1.1; jeweils Exkurs

2. Grundlagen

2.1. Spezifikation ökonometrischer Modelle

Die Grundlage zur Spezifikation eines ökonometrischen Modells bildet eine a priori meist durch die ökonomische Theorie vorgegebene funktionale Beziehung zwischen einer (im Rahmen des zu spezifizierenden Modells erklärten, d.h. endogenen) ökonomischen Variablen y und n (im Rahmen des Modells erklärenden, d.h. exogenen, jedoch nicht notwendigerweise) ökonomischen Variablen $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Realisieren sich nun die betreffenden Variablen in der Zeit und kann davon ausgegangen werden, daß die funktionale Beziehung in der Zeit oder zumindest in dem zur Untersuchung anstehenden Zeitraum stabil ist, so wird die Spezifikation eines Zeitreihenmodells angestrebt. Realisieren sich die Variablen bei verschiedenen ökonomischen Einheiten, etwa bei verschiedenen Personen, Haushalten, Firmen, Regionen oder Sektoren, zum gleichen Zeitpunkt, bzw. während desselben Zeitraumes, so ergibt sich die Spezifikation eines Querschnittmodells, sofern die funktionale Beziehung zumindest über die betrachteten ökonomischen Einheiten hinweg konstant ist.[1)]

Aus vielfältigsten und hinlänglich bekannten Gründen wird man von einer funktionalen Beziehung zwischen ökonomischen Variablen jedoch nicht erwarten können, daß durch sie die Realisation der Variablen streng deterministisch geregelt wird. Diesem Tatbestand ist bei der Spezifikation des Modells Rechnung zu tragen.

Es ist speziell bei ökonomischen Beziehungen vertretbar, die Hypothese aufzustellen, daß eine Störvariable u, die sich entsprechend entweder in der Zeit oder bei den ökonomischen

---

1) Indem sich eine ökonomische Variable in der Zeit oder bei verschiedenen ökonomischen Einheiten realisiert, kann man eigentlich nicht mehr von einer Variablen, sondern nur von einer Folge von sachlich gleichen, jedoch zeitlich verschiedenen Variablen, bzw. von einer Menge von sachlich gleichen, sich jedoch bei verschiedenen Einheiten realisierenden Variablen sprechen. Wenn nun im folgenden von einer Variablen gesprochen wird, soll damit sowohl die Folge bzw. Menge als auch eine Teilfolge bzw. -menge der Folge bzw. Menge als auch der allen Variablen gemeinsame ökonomische Sachverhalt gemeint sein können; durch den Zusammenhang wird jeweils deutlich, was gemeint ist.

Einheiten realisiert, ohne jedoch direkt beobachtbar zu sein, die funktionale Beziehung additiv überlagert, so daß es sich als Lösung anbietet, diese Störvariable in das Modell aufzunehmen, um so die Lücke zwischen deterministischer und wirklicher Realisation der Variablen zu schließen.

Nachdem einer gestörten Beziehung gegenüber einer streng deterministischen Beziehung begründet der Vorzug gegeben werden konnte, ist nun nach einer geeigneten Spezifikation des deterministischen Teils der Beziehung zu suchen. Zahlreiche Gründe lassen sich anführen, um die Hypothese zu untermauern, daß von einer linearen Beziehung zwischen den Variablen ausgegangen werden kann, zumal, wenn nur ein bestimmter Zeitraum oder eine begrenzte Anzahl ökonomischer Einheiten betrachtet wird. Zusammenfassend läßt sich eine in den Variablen $y, x_1, x_2, \ldots, x_n$ und u lineare Beziehung dann durch die (parametrische) Gleichung

$$y = X\beta + u \quad ^{1)}$$

beschreiben, sofern man vermutet, daß diese Beziehung mindestens für jene T betrachteten Zeitpunkte bzw. ökonomische Einheiten gültig ist.

Zur endgültigen Formulierung eines ökonometrischen Modells bedarf es jedoch weiterer a priori Information bzw. a priori Hypothesen, die sich zum einen auf die Variablen $y, x_1, x_2, \ldots, x_n$ und u, zum anderen auf den Parametervektor ß beziehen können. Je nach Art dieser Hypothesen bzw. dieses Wissens ergeben sich die verschiedensten ökonometrischen Modelle, von denen jedoch nur diejenigen spezifiziert werden, die in dieser Arbeit betrachtet werden.

---

1) Mit y und u seien (Tx1)Vektoren bezeichnet, die jeweils entsprechende Teilfolgen der Länge T bzw. Teilmengen des Umfangs T oben erwähnter Variablenfolgen bzw. -mengen enthalten. Durch die (Txn)Matrix X werden die entsprechenden n(Tx1)Vektoren der Variablen $x_1, x_2, \ldots, x_n$ zusammengefaßt. Der (nx1)Vektor ß schließlich enthält die auf Grund der Linearität den einzelnen Variablen x_i zuzuordnende Parameter β_i.

Es wird im folgenden immer davon ausgegangen, daß zum einen die Variablen $x_1, x_2, \ldots, x_n$ nicht stochastisch sind, daß zum anderen jedoch die Variable u und damit auch die Variable y stochastisch ist, und daß schließlich die Parameter $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n$ ebenfalls nicht stochastisch sind und a priori keiner Beschränkung unterliegen. Darauf aufbauend wird unter Berücksichtigung zusätzlicher Hypothesen über den Erwartungswert und die Kovarianzmatrix der Störvariablen das lineare Standardmodell durch

$$(M) \quad y = X\beta+u,\ E(u)=o,\ E(uu')=\sigma^2 I,\ \beta \in \mathbb{R}^n,\ o<\sigma^2<\infty,$$

das verallgemeinerte lineare Modell durch

$$(M') \quad y = X\beta+u,\ E(u)=o,\ E(uu')=\sigma^2\Sigma,\beta \in \mathbb{R}^n,\ o<\sigma^2<\infty,\ \Sigma \text{ p.d.},$$

und das Varianzkomponentenmodell durch

$$(M'') \quad \begin{aligned} & y = X\beta+u,\ E(u)=o,\ E(uu')=\Sigma,\ \beta \in \mathbb{R}^n,\ \Sigma \text{ p.d.} \\ & \Sigma = \sum_{i \in \mathcal{I}} \omega_i^2 \Omega_i,\ \Omega_i=\Omega_i'=\Omega_i^2 \quad \forall i \in \mathcal{I}, \\ & \sum_{i \in \mathcal{I}} \Omega_i = I\ ;\ o<\omega_i^2<\infty \ \forall i \in \mathcal{I} \end{aligned}$$

spezifiziert, wobei Σ bzw. Ω_i bekannte Matrizen und σ^2 bzw. ω_i^2 unbekannte Parameter sind, die den jeweils an sie gestellten Anforderungen genügen.

Durch diese in der Strukturform spezifizierten Modelle wird jeder im Rahmen des jeweiligen Modells zulässigen Struktur $S^*_{X,I}=\{\beta^*,\sigma^{*2}\}, S^*_{X,\Sigma}=\{\beta^*,\sigma^{*2}\}$ oder $S^*_{X,\Omega_1,\Omega_2,\ldots}=\{\beta^*,\omega_1^{*2},\omega_2^{*2},\ldots\}$ eindeutig ein Erwartungswert $E(y^*)$ und eine Kovarianzmatrix $V(y^*)$ zugeordnet, wobei eine Struktur im Rahmen obiger Modelle zulässig ist, wenn β^* ein Vektor aus dem $\mathbb{R}^n$ ist und σ^{*2} bzw. $\omega_1^{*2},\omega_2^{*2},\ldots$ aus dem $\mathbb{R}^1_+$ sind. Dadurch wird deutlich, daß durch diese Modelle jeweils eine Menge von Erwartungswerten und Kovarianzmatrizen abgegrenzt wird, deren Elemente mit der den Modellen zugrundeliegenden a priori Information bzw. den a priori Hypothesen verträglich sind.

Da durch die Konfrontation eines ökonometrischen Modells mit dem über die Variablen vorliegenden Beobachtungsmaterial nicht nur beabsichtigt wird, Aussagen über den "wahren", jedoch unbekannten Erwartungswert und die "wahre", ebenfalls unbekannte Kovarianzmatrix der Zufallsvariablen y zu machen, sondern vor allem Aussagen über die "wahre" Struktur und somit über die dem Modell zugrundeliegende ökonomische Theorie angestrebt werden, ist festzuhalten, unter welchen Voraussetzungen eindeutig von einem bestimmten Erwartungswert $E(y^*)$ und einer bestimmten Kovarianzmatrix $V(y^*)$ auf die diesen Erwartungswert und diese Kovarianzmatrix erzeugende Struktur S^* geschlossen werden kann, die Struktur identifizierbar ist.

Die Identifizierbarkeit der Erwartungswertstruktur der Modelle (M), (M') und (M"), also der Parameter $\beta_1,\beta_2,\ldots,\beta_n$ ist gewährleistet, wenn die Variablen $x_1,x_2,\ldots,x_n$ linear unabhängig sind, also rg X=n gilt. Daß die Kovarianzstruktur der Modelle (M) und (M') immer identifizierbar ist, kann unmittelbar eingesehen werden, für das Modell (M") muß jedoch in Analogie zur E-Identifizierbarkeit gelten, daß die Matrizen $\Omega_1,\Omega_2,\ldots$ linear unabhängig sind.[1] Diese Voraussetzungen seien, sofern nicht explizit darauf verzichtet wird, stets erfüllt, denn m.E. ist ein nicht identifizierbares Modell als nicht sorgfältig spezifiziert zu bezeichnen, indem exakte lineare Beziehungen zwischen den Variablen übersehen wurden, so daß der Überarbeitung der Spezifikation gegenüber der Beibehaltung der Spezifikation bei gleichzeitiger Beschränkung auf sogenannte schätzbare Parameterfunktionen der Vorzug gegeben werden sollte.

Nun wird man, wie bereits oben angedeutet, oft in der Lage sein, mehrere plausible, d.h. mit der ökonomischen Theorie vereinbare Modelle spezifizieren zu können, indem man unterschiedliche über das a priori Wissen hinausgehende a priori Hypothesen berücksichtigt. Sei also, um nur einen Fall zu erläutern, neben dem Modell (M') noch das Modell

(M') $y=Z\gamma+v, E(v)=o, E(vv')=\omega^2\Omega, \gamma\in\mathbb{R}^p, o<\omega^2<\infty,\ \Omega$ p.d.

1) Im Rahmen des Modells (M") stellt sich aufgrund des speziellen Charakters der Matrizen Ω_i das Identifizierbarkeitsproblem jedoch nicht. Erst bei allgemeineren Spezifikationen, bei denen etwa nur die Vertauschbarkeit der Matrizen Ω_i vorausgesetzt wird, muß diesem Problem Beachtung geschenkt werden.

zu spezifizieren, wobei an die Variablen $z_1, z_2, \ldots, z_p$ und die Parameter $\gamma_1, \ldots, \gamma_p$, sowie die Matrix Ω und den Parameter ω^2 dieselben Anforderungen gestellt werden wie an die entsprechenden Größen des Modells (M'), so ist es möglich, daß den Modellen äquivalente Spezifikationen zugrunde liegen, daß dem einen Modell in Relation zum jeweils anderen Modell eine verschärfte oder abgeschwächte Spezifikation zugrunde liegt, und daß sich schließlich beide Spezifikationen widersprechen.

Äquivalent sind die Spezifikationen, wenn durch beide Modelle dieselbe Menge von Erwartungswerten und Kovarianzmatrizen beschrieben wird, wenn sich also beide Modelle nur in der Strukturform unterscheiden (deshalb auch die Indizierung s.o.), wenn ein Modell als regulär reparametrisierte Version des jeweils anderen Modells aufgefaßt werden kann. Auf die Modelle (M') und ($\underline{M}$') würde dies zutreffen, wenn die Matrizen X und Z gleiche Spaltenräume aufspannen ($\mathcal{M}(X)=\mathcal{M}(Z)$) und die Matrizen Σ und Ω proportional sind.

Die Verschärfung bzw. Abschwächung einer Spezifikation liegt dann vor, wenn die Menge der Erwartungswerte und Kovarianzmatrizen eines Modells in der entsprechenden Menge des anderen Modells enthalten ist. Notwendigerweise muß die Zahl der Parameter dann in beiden Modellen unterschiedlich sein, so daß dem Modell ($\underline{M}$') im Vergleich zum Modell (M') nur eine bezüglich der Erwartungswertspezifikation verschärfte ($\mathcal{M}(Z) \subset \mathcal{M}(X)$) bzw. abgeschwächte ($\mathcal{M}(Z) \supset \mathcal{M}(X)$) Spezifikation zugrunde liegen kann. Verschärfte bzw. abgeschwächte Kovarianzspezifikationen sind hier also nur im Vergleich von Varianzkomponentenmodellen denkbar. Generell kann die Strukturform eines Modells mit verschärfter Spezifikation durch eine singuläre Reparametrisierung mit der Strukturform des Modells mit abgeschwächter Spezifikation verknüpft werden, wobei dies sowohl für die Erwartungswert- als auch die Kovarianzstruktur gilt.

Ein Widerspruch zwischen den Spezifikationen liegt schließlich vor, wenn weder der Tatbestand der Äquivalenz, noch der Abschwächung oder Verschärfung vorliegt, wenn es also im Rahmen

des einen Modells zulässige Erwartungswerte und Kovarianzmatrizen gibt, die im anderen Modell unzulässig sind und umgekehrt.

Obwohl es also möglich ist, die dieser Arbeit zugrunde gelegten Modelle (M),(M') und (M") in so knapper Form zu beschreiben, tritt dabei jedoch die spezielle Strukturierung, wie sie etwa ein Zeitreihen-, ein Querschnitts- oder ein kombiniertes Zeitreihen- und Querschnittsmodell auszeichnet, nicht hervor. Deshalb wird, sofern Beispiele betrachtet werden, auf Darstellungen zurückgegriffen, die dieser Strukturierung explizit Rechnung tragen und nur dann zu der kompakten Darstellung übergegangen, wenn die Behandlung der jeweils anstehenden Probleme dadurch erleichtert wird.

2.2. Aggregation ökonomischer Variabler

Vorab sei die Vielfalt möglicher Aggregationen von ökonomischen Variablen belegt. Dazu werden zuerst einige bei der Formulierung von Aggregationsvorschriften für ökonomische Variable zu beachtende Prinzipien erläutert und dann einige diesen Prinzipien folgende Aggregationsvorschriften, genauer, diesen Vorschriften genügende lineare Transformationen vorgestellt. Es sind dies Transformationen, durch die sich bei ökonomischen Einheiten realisierende Variable über ökonomische Einheiten und sich in der Zeit realisierende Variable über die Zeit aggregiert werden.

2.2.1 Aggregation über ökonomische Einheiten

Realisieren sich die zu einem (Tx1) Vektor z zusammengefaßten ursprünglichen Variablen bei einer Gesamtheit von T ökonomischen Einheiten, so ist von den verschiedenen zu (Sx1) Vektoren zusammengefaßten aggregierten Variablen zu verlangen, daß sie sich bei einer Gesamtheit von S aggregierten ökonomischen Einheiten (Gruppen ökonomischer Einheiten) realisieren. Nun wird man nicht willkürlich ökonomische Einheiten auswählen und zu aggregierten ökonomischen Einheiten zusammenfassen, vielmehr wird man die Auswahl an bei der Gesamtheit der T ursprünglichen ökonomischen Einheiten zu beobachtenden Merkmalen orientieren.

Sei $\mathfrak{A}$ ein Merkmal mit den Merkmalsausprägungen $a_1, a_2, \ldots, a_s$, so lassen sich S aggregierte ökonomische Einheiten bilden, die ursprüngliche ökonomische Einheiten mit jeweils gleicher Merkmalsausprägung repräsentieren. Ist durch $\mathfrak{B}$ ein weiteres Merkmal mit den Merkmalsausprägungen $b_1, b_2, \ldots, b_R$ gegeben, so sind insgesamt R+S aggregierte ökonomische Einheiten zu bilden, sofern man jedes Merkmal für sich zur Gruppierung heranzieht, betrachtet man jedoch beide Merkmale gemeinsam, so ist die Bildung von R·S Gruppen möglich. Zum einen wird jede ökonomische Einheit genau zwei Gruppen, zum anderen nur einer Gruppe zugeordnet. Stehen mehr als zwei Merkmale zur Gruppierung zur Verfügung, so ergibt sich eine entsprechend größere Zahl aggregierter ökonomischer Einheiten.

Sei nun vorerst davon ausgegangen, daß durch die ursprüngliche ökonomische Variable ein quantitativer ökonomischer Sachverhalt beschrieben wird. Gibt diese Variable nun eine ökonomische Extensität[1] wieder, so kann eine aggregierte Variable entweder die entsprechende Gesamt- oder Durchschnittsextensität einer jeden Gruppe, aber auch eine andere aus der zugrunde liegenden Extensität abzuleitende Gesamt- oder Durchschnittsextensität und nicht zuletzt auch eine Durchschnittsintensität zum Inhalt haben. Gilt es eine Variable zu aggregieren, der ein intensiver Sachverhalt zugrunde liegt, so kann durch eine aggregierte Variable nicht nur die entsprechende Durchschnittsintensität, sondern auch eine verwandte Gesamt- oder Durchschnittsextensität beschrieben werden. Zugelassen zur Variablenaggregation über ökonomische Einheiten sind somit die einfache und gewogene Summation und Durchschnittsbildung.

Orientiert man nun die Aggregation an dem Merkmal $\mathcal{A}$, so würde, wenn die Merkmalsausprägung a_j mit der Häufigkeit $h(a_j)$ in der Gesamtheit der T ökonomischen Einheiten beobachtet worden ist, die (SxT) Aggregationsmatrix

$$\tilde{G}'_{\mathcal{A}} = \begin{pmatrix} \underbrace{1,1,\ldots,1}_{h(a_1)},0,0,\ldots,0, & \ldots & ,0,0,\ldots,0 \\ 0,0,\ldots,0,\underbrace{1,1,\ldots,1}_{h(a_2)}, & \ldots & ,0,0,\ldots,0 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ 0,0,\ldots,0,0,0,\ldots,0, & \ldots & \underbrace{,1,1,\ldots,1}_{h(a_s)} \end{pmatrix}$$

die Transformation von T ursprünglichen Extensitäten in S Gruppenextensitäten leisten, wenn die ursprünglichen

---

1) Extensiv sind Variable, die ungewogen addierbar sind, wie etwa Umsatz, Zahl der Beschäftigten, Einkommen u.ä., intensiv sind Variable, die nicht ungewogen addierbar sind, man denke an Kapitalproduktivität, Umsatzrentabilität, Exportintensität u.ä.. Vgl. P. Flaskämper, Allgemeine Statistik, (1962)

Variablen entsprechend geordnet wären. Da nun die Ordnung von sich bei ökonomischen Einheiten realisierenden Variablen im Gegensatz zur Ordnung von sich in der Zeit realisierenden Variablen nicht zwangsläufig vorgeschrieben ist, da es kein starres, natürliches Ordnungsprinzip zur Ordnung ökonomischer Einheiten gibt, wird es notwendig, durch eine reguläre (TxT) Permutationsmatrix $M_{\mathcal{A}}$ [1] eine in Bezug auf eine gegebene Ordnung der Merkmalsausprägungen des Merkmals $\mathcal{A}$ adäquat Ordnung herzustellen. Es ist somit

$$(A.1) \qquad z_{\mathcal{A}} = G_{\mathcal{A}}' z = \tilde{G}_{\mathcal{A}}' M_{\mathcal{A}} z$$

die Transformation, die bei beliebiger, jedoch fester und durch die Matrix $M_{\mathcal{A}}$ berücksichtigter Ordnung der ökonomischen Einheiten und somit auch der Variablen z die gewünschte Aggregation leistet.

Wenn neben dem Merkmal $\mathcal{A}$ noch das Merkmal $\mathcal{L}$ zur Aggregation heranzuziehen ist, ergeben sich, wiederum die ungewogene Summation zugrunde gelegt, die (R+S) aggregierten Variablen $z_{\mathcal{A},\mathcal{L}}$ durch

$$(A.2) \qquad z_{\mathcal{A},\mathcal{L}} = \begin{pmatrix} z_{\mathcal{A}} \\ z_{\mathcal{L}} \end{pmatrix} = G_{\mathcal{A},\mathcal{L}}' z = \begin{pmatrix} G_{\mathcal{A}}' \\ G_{\mathcal{L}}' \end{pmatrix} z ,$$

also durch das Zusammenfügen der beiden Aggregationsmatrizen $G_{\mathcal{A}}'$ und $G_{\mathcal{L}}'$ aus den ursprünglichen Variablen z. Sind beide Merkmale gemeinsam heranzuziehen, so sind die R·S aggregierten Variablen durch

$$(A.3) \quad z_{\mathcal{A}\times\mathcal{L}} = \begin{pmatrix} z_{\mathcal{A}/b_1} \\ \vdots \\ z_{\mathcal{A}/b_R} \end{pmatrix} = G_{\mathcal{A}\times\mathcal{L}}' z = \begin{pmatrix} G_{\mathcal{A}/b_1}' \\ \vdots \\ G_{\mathcal{A}/b_R}' \end{pmatrix} z = \begin{pmatrix} G_{\mathcal{L}}' A_{b_1} \\ \vdots \\ G_{\mathcal{L}}' A_{b_R} \end{pmatrix} z = \begin{pmatrix} G_{\mathcal{A}}' M_{\mathcal{L}}' \mathrm{diag}(\underbrace{1,\ldots,1}_{h(b_1)},\ldots,0,\ldots,0) M_{\mathcal{L}} \\ \vdots \\ G_{\mathcal{A}}' M_{\mathcal{L}}' \mathrm{diag}(0,\ldots,0,\ldots,\overbrace{1,\ldots,1}^{h(b_R)}) M_{\mathcal{L}} \end{pmatrix} z$$

zu bilden. Es leistet dabei die Untermatrix $G_{\mathcal{A}/b_j}'$ eine Aggregation in Bezug auf das Merkmal $\mathcal{A}$ für diejenigen Variablen,

---

1) Die Permutationsmatrix $M_{\mathcal{A}}$ hat als (i,j)-tes Element eine Eins, sofern die j-te Komponente des Vektors z die i-te Komponente eines Vektors $\tilde{z}$ sein soll, andernfalls eine Null.

die sich bei ökonomischen Einheiten mit der Merkmalsausprägung b_i des Merkmals $\mathfrak{B}$ realisieren. Wie schon angedeutet, läßt sich diese Untermatrix auf ein Produkt aus der bekannten Gruppierungsmatrix $G_{\mathfrak{A}}$ und einer idempotenten Auswahlmatrix

$$A_{b_i} = M'_{\mathfrak{B}} \operatorname{diag}(0 \ldots 0, \underbrace{1,\ldots,1}_{h(b_i)}, 0 \ldots 0)\, M_{\mathfrak{B}}$$

zurückführen. Durch diese Auswahlmatrix wird in einem ersten Schritt die dem Merkmal $\mathfrak{B}$ adäquate Ordnung erzeugt, in einem zweiten Schritt die Auswahl der entsprechenden Variablen vorgenommen und in einem dritten Schritt die ursprüngliche Ordnung, auf die sich ja die Matrix $G_{\mathfrak{A}}'$ bezieht, wiederhergestellt. Bleibt noch zu erwähnen, daß der durch

$$(A.3') \quad z_{\mathfrak{B}\times\mathfrak{A}} = \begin{pmatrix} z_{\mathfrak{B}/a_1} \\ \vdots \\ z_{\mathfrak{B}/a_s} \end{pmatrix} = G'_{\mathfrak{B}\times\mathfrak{A}} z = \begin{pmatrix} G'_{\mathfrak{B}/a_1} \\ \vdots \\ G'_{\mathfrak{B}/a_s} \end{pmatrix} z = \begin{pmatrix} G'_{\mathfrak{B}} A_{a_1} \\ \vdots \\ G'_{\mathfrak{B}} A_{a_s} \end{pmatrix} z$$

beschriebenen Transformation natürlich auch die gewünschte Aggregation zugrunde liegt, einzig die Ordnung der aggregierten Variablen $z_{\mathfrak{B}\times\mathfrak{A}}$ ist im Vergleich zur durch die Aggregationsmatrix $G'_{\mathfrak{A}\times\mathfrak{B}}$ erzeugten Ordnung der aggregierten Variablen $z_{\mathfrak{A}\times\mathfrak{B}}$ verändert.

Sind schließlich die Merkmale $\mathfrak{A},\mathfrak{B},\mathfrak{C},\ldots$ zur Gruppierung heranzuziehen, so sind einmal (S+R+Q+...) aggregierte Variable

$$(A.4) \quad z_{\mathfrak{A},\mathfrak{B},\mathfrak{C},\ldots} = \begin{pmatrix} z_{\mathfrak{A}} \\ z_{\mathfrak{B}} \\ z_{\mathfrak{C}} \\ \vdots \end{pmatrix} = G_{\mathfrak{A},\mathfrak{B},\mathfrak{C},\ldots}' z = \begin{pmatrix} G_{\mathfrak{A}}' \\ G_{\mathfrak{B}}' \\ G_{\mathfrak{C}}' \\ \vdots \end{pmatrix} z$$

zu bilden, wenn jedes Merkmal für sich herangezogen wird. Weiter sind $S \cdot R \cdot Q \cdot \ldots$ aggregierte Variable

$$(A.5) \quad z_{\mathfrak{A}\times\mathfrak{B}\times\mathfrak{C}\times\ldots} = \begin{pmatrix} z_{\mathfrak{A}/b_1,c_1,\ldots} \\ \vdots \\ z_{\mathfrak{A}/b_R,c_Q\ldots} \\ \vdots \end{pmatrix} = G'_{\mathfrak{A}\times\mathfrak{B}\times\mathfrak{C}\times\ldots} z = \begin{pmatrix} G'_{\mathfrak{A}/b_1,c_1,\ldots} \\ \vdots \\ G'_{\mathfrak{A}/b_R,c_Q,\ldots} \\ \vdots \end{pmatrix} z = \begin{pmatrix} G'_{\mathfrak{A}} A_{b_1} A_{c_1} \cdot \ldots \\ \vdots \\ G'_{\mathfrak{A}} A_{b_R} A_{c_Q} \cdot \ldots \\ \vdots \end{pmatrix} z$$

abzuleiten, wenn die Merkmale gemeinsam herangezogen werden.

Ist nun statt einer einfachen Summation eine Mittelung durchzuführen, so sind für den Fall der Gruppierung nach einem Merkmal die S aggregierten Variablen

$$(A.6)\quad \bar{z}_{\sigma_1} = \bar{G}_{\sigma_1} z = D^{+}_{\sigma_1} G'_{\sigma_1} z$$

und für den Fall der Gruppierung nach zwei Merkmalen zum einen die (R+S) aggregierten Variablen

$$(A.7)\quad \bar{z}_{\sigma_1,\sigma_2} = \begin{pmatrix} \bar{z}_{\sigma_1} \\ \bar{z}_{\sigma_2} \end{pmatrix} = \bar{G}_{\sigma_1,\sigma_2} z = \begin{pmatrix} \bar{G}_{\sigma_1} \\ \bar{G}_{\sigma_2} \end{pmatrix} z = \begin{pmatrix} D^{+}_{\sigma_1} G'_{\sigma_1} \\ D^{+}_{\sigma_2} G'_{\sigma_2} \end{pmatrix} z$$

zum anderen die R·S aggregierten Variablen

$$(A.8)\quad \bar{z}_{\sigma_1 x \sigma_2} = \begin{pmatrix} \bar{z}_{\sigma_1/b_1} \\ \vdots \\ \bar{z}_{\sigma_1/b_R} \end{pmatrix} = \bar{G}_{\sigma_1 x \sigma_2} z = \begin{pmatrix} \bar{G}_{\sigma_1/b_1} \\ \vdots \\ \bar{G}_{\sigma_1/b_R} \end{pmatrix} z = \begin{pmatrix} D^{+}_{\sigma_1/b_1} G'_{\sigma_1/b_1} \\ \vdots \\ D^{+}_{\sigma_1/b_R} G'_{\sigma_1/b_R} \end{pmatrix} z$$

aus den ursprünglichen Variablen z abzuleiten, wobei

$$D_{\sigma_1} = \mathrm{diag}(h(a_1),\ldots,h(a_S)) = G_{\sigma_1}' G_{\sigma_1}$$

und

$$D_{\sigma_1/b_i} = \mathrm{diag}(h(a_1,b_i),\ldots,h(a_S,b_i) = G'_{\sigma_1/b_i} G_{\sigma_1/b_i} = G_{\sigma_1}' A_{b_i} G_{\sigma_1}$$

ist.[1)]

Es bleibt noch die gewogene Summation und Mittelung darzustellen. Seien die den einzelnen ursprünglichen Variablen zugeordneten Gewichte, meist ebenfalls eine einen anderen ökonomischen Sachverhalt beschreibende Variable, in einem (Tx1) Vektor κ zusammengefaßt, so ergeben sich, den drei Fällen entsprechend, die Aggregationen

$$(A.9)\quad z_{\sigma_1;\kappa} = G_{\sigma_1}' \mathrm{diag}(\kappa) z$$

$$(A.10)\quad z_{\sigma_1,\sigma_2;\kappa} = \begin{pmatrix} z_{\sigma_1;\kappa} \\ z_{\sigma_2;\kappa} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} G_{\sigma_1}' \\ G_{\sigma_2}' \end{pmatrix} \mathrm{diag}(\kappa) z$$

und

$$(A.11)\quad z_{\sigma_1 x \sigma_2;\kappa} = G'_{\sigma_1 x \sigma_2} \mathrm{diag}(\kappa) z$$

---

1) Da es möglicherweise Merkmalsausprägungen a_k oder b_l gibt, für die $h(a_k)=o$ oder $h(a_k,b_l)=o$ gilt, wird verallgemeinert invertiert.

sofern nur summiert wird. Soll zudem noch eine Mittelung angeschlossen werden, so sind obigem Vorgehen entsprechend die Matrizen

$$D_{\mathfrak{A};\kappa} = G'_{\mathfrak{A}} \operatorname{diag}(\kappa)\, G_{\mathfrak{A}}$$

und

$$D_{\mathfrak{A}/b_i;\kappa} = G'_{\mathfrak{A}/b_i} \operatorname{diag}(\kappa) G_{\mathfrak{A}/b_i} = G'_{\mathfrak{A}} A_{b_i} \operatorname{diag}(\kappa) A_{b_i} G_{\mathfrak{A}}$$

zu bestimmen, um auf diese Matrizen zurückgreifend dann durch

$$\text{(A.12)}\quad \bar{z}_{\mathfrak{A};\kappa} = D^{+}_{\mathfrak{A};\kappa} G'_{\mathfrak{A}} \operatorname{diag}(\kappa) z$$

$$\text{(A.13)}\quad \bar{z}_{\mathfrak{A},\mathfrak{L};\kappa} = \begin{pmatrix} \bar{z}_{\mathfrak{A};\kappa} \\ \bar{z}_{\mathfrak{L};\kappa} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} D^{+}_{\mathfrak{A};\kappa} G'_{\mathfrak{A}} \\ D^{+}_{\mathfrak{L};\kappa} G'_{\mathfrak{L}} \end{pmatrix} \operatorname{diag}(\kappa) z$$

und

$$\text{(A.14)}\quad \bar{z}_{\mathfrak{A}\times\mathfrak{L};\kappa} = \begin{pmatrix} \bar{z}_{\mathfrak{A}/b_1;\kappa} \\ \vdots \\ \bar{z}_{\mathfrak{A}/b_R;\kappa} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} D^{+}_{\mathfrak{A}/b_1;\kappa} G'_{\mathfrak{A}/b_1} \\ \vdots \\ D^{+}_{\mathfrak{A}/b_R;\kappa} G'_{\mathfrak{A}/b_1} \end{pmatrix} \operatorname{diag}(\kappa) z$$

der jeweiligen Aufgabenstellung angemessen zu aggregieren.

Es ist nun noch darauf hinzuweisen, daß diese Aggregationsmatrizen auch zur Aggregation von sich bei ökonomischen Einheiten realisierenden o,1-Variablen herangezogen werden können. Sei etwa $\mathfrak{L}$ ein Merkmal mit den Merkmalsausprägungen c und $\bar{c}$, das zur Konstruktion zweier o,1-Variablen herangezogen wird, so führt eine Aggregation dieser Variablen mit der Aggregationsmatrix $G_{\mathfrak{A}}$' zum einen auf die durch c bedingte und zum anderen auf die durch $\bar{c}$ bedingte Häufigkeitsverteilung des Merkmals $\mathfrak{A}$. Da nun aber qualitative Variable in ökonometrischen Modellen durch o,1-Variable berücksichtigt werden, wird deutlich, daß diese Aggregationsmatrizen auf alle sich bei ökonomischen Einheiten realisierenden und in ökonometrischen Modellen verwendbaren Variablen anzuwenden sind.

Abschließend sei noch bemerkt, daß von der Art der Aggregation bei bekannter Anzahl ursprünglicher und aggregierter

ökonomischer Einheiten nur auf das Konstruktionsprinzip, nicht jedoch auf die Aggregationsmatrix selbst geschlossen werden kann. Insbesondere reicht das Wissen um die Häufigkeitsverteilung, für den Fall mehrerer Variabler das Wissen um die Randverteilungen, bzw. die gemeinsame Häufigkeitsverteilung nicht aus, die Aggregationsmatrix explizit anzugeben, sofern nicht bekannt ist, bei welcher ökonomischen Einheit welche Merkmalsausprägungen beobachtet worden sind, sofern also die Permutationsmatrix unbekannt ist.

2.2.2 Aggregation über die Zeit

Wenn im folgenden stets eine sich im Verlauf von T Jahre realisierende Quartalsvariable z als ursprüngliche Variable zugrunde gelegt wird, so ist dieses exemplarische Vorgehen dadurch zu rechtfertigen, daß schon an diesem Spezialfall die Prinzipien der Aggregation über die Zeit deutlich werden.

Beschreibt nun die Quartalsvariable einen sich am Quartalsende realisierenden ökonomischen Bestand und soll die aggregierte Variable z_B den entsprechenden Bestand am Jahresende wiedergeben, so ist diese durch [1)]

$$(AA.1)\quad z_B = G_B'z = \begin{pmatrix} 0,0,0,1,0,0,0,0,0,\ldots,0,0,0,0 \\ 0,0,0,0,0,0,0,1,0,\ldots,0,0,0,0 \\ \vdots \\ 0,0,0,0,0,0,0,0,0,\ldots,0,0,0,1 \end{pmatrix} z$$

zu bilden, wird also durch die Aggregationsmatrix eine Variablenauswahl geleistet. Soll jedoch durch die aggregierte Variable ein aufgrund der Quartalsbestände ermittelter Jahresdurchschnittsbestand beschrieben werden, so ist

$$(AA.2)\quad \bar{z}_B = \bar{G}_B'z = \begin{pmatrix} 1/4,1/4,1/4,1/4, 0 , 0 , 0 , 0 ,0,\ldots, 0 , 0 , 0 , 0 \\ 0 , 0 , 0 , 0 ,1/4,1/4,1/4,1/4,0,\ldots, 0 , 0 , 0 , 0 \\ \vdots \\ 0 , 0 , 0 , 0 , 0 , 0 , 0 , 0 ,0,\ldots,1/4,1/4,1/4,1/4 \end{pmatrix} z$$

die adäquate Aggregation.

Gibt die Quartalsvariable aber einen sich während eines jeden Quartals realisierenden ökonomischen Strom wieder, so wird die den entsprechenden Jahresstrom wiedergebende aggregierte Variable z_S durch

$$(AA.3)\quad z_S = G_S'z = \begin{pmatrix} 1,1,1,1,0,0,0,0,0,\ldots,0,0,0,0 \\ 0,0,0,0,1,1,1,1,0,\ldots,0,0,0,0 \\ \vdots \\ 0,0,0,0,0,0,0,0,0,\ldots,1,1,1,1 \end{pmatrix} z$$

---

1) Vgl. G.C. Chow und An-loh Lin (1971) Seite 373

erzeugt. Soll jedoch durch die aggregierte Variable nur der entsprechende Jahreszuwachs wiedergegeben werden, so ist auf die Aggregation

$$(AA.4)\quad z_{\Delta S}=G'_{\Delta S}\,z=\begin{pmatrix}-1,-1,-1,-1,\ 1,\ 1,\ 1,\ 1,0,\ldots,\ 0,0,0,0,0\\ 0,\ 0,\ 0,\ 0,-1,-1,-1,-1,1,\ldots,\ 0,0,0,0,0\\ \vdots\\ 0,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0,0,\ldots,-1,1,1,1,1\end{pmatrix}z$$

zurückzugreifen. Müssen nun aber bei der Bestimmung der Jahreszuwachsvariablen Quartalszuwachsvariable verwandt werden, so muß die aggregierte Variable durch [1]

$$(AA.5)\quad z_{\Delta S}=G'_{\Delta,\Delta S}z_{\Delta}=\begin{pmatrix}1,2,3,4,3,2,1,0,0,0,0,\ldots,0,0,0,0,0,0,0\\ 0,0,0,0,1,2,3,4,3,2,1,\ldots,0,0,0,0,0,0,0\\ \vdots\\ 0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,\ldots,1,2,3,4,3,2,1\end{pmatrix}z_{\Delta}$$

erzeugt werden, denn es gilt

$$\begin{pmatrix}-1,-1,-1,-1,\ 1,\ 1,\ 1,\ 1,0,\ldots,0\\ 0,\ 0,\ 0,\ 0,-1,-1,-1,-1,1,\ldots,0\\ \vdots\\ 0,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0,0,\ldots,1\end{pmatrix}=\left(\begin{array}{c|ccc}1,2,3,4,3,2,1,0,0,0,0,\ldots,0 & -1,\ 1,0,\ldots,0,0\\ 0,0,0,0,1,2,3,4,3,2,1,\ldots,0 & 0,-1,1,\ldots,0,0\\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots\\ 0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,\ldots,1 & 0,\ 0,0,\ldots,-1,1\end{array}\right)$$

Beschreibt die Quartalsvariable schließlich eine ökonomische Intensität, so wird man zur Gewinnung der entsprechenden Jahresvariablen die eine gewogene Summation leistende Aggregation

$$(AA.6)\quad z_I=G'_I z=\begin{pmatrix}\kappa_{11},\kappa_{12},\kappa_{13},\kappa_{14},\ 0\ ,\ 0\ ,\ 0\ ,\ 0\ ,\ 0,\ldots,\ 0\ ,\ 0\ ,\ 0\ ,\ 0\\ 0\ ,\ 0\ ,\ 0\ ,\ 0\ ,\kappa_{21},\kappa_{22},\kappa_{23},\kappa_{24},\ 0,\ldots,\ 0\ ,\ 0\ ,\ 0\ ,\ 0\\ \vdots\\ 0\ ,\ 0\ ,\ 0\ ,\ 0\ ,\ 0\ ,\ 0\ ,\ 0\ ,\ 0\ ,\ 0,\ldots,\kappa_{T1},\kappa_{T2},\kappa_{T3},\kappa_{T4}\end{pmatrix}=z$$

durchführen.[2] Wenn die ökonomische Intensität übrigens auf einen Quotienten ökonomischer Bestände zurückzuführen ist, vereinfacht sich die Aggregationsmatrix erheblich, denn es kann dann auf die oben vorgestellte Aggregation (AA.1) zurückgegriffen werden.

---

1) vgl. A. Zellner und C. Montmarquette (1971) S. 336 und 338

2) Man denke etwa an die Zusammenfassung Quotienten $z_{it} = v_{it}/w_{it}$ durch Gewichte $\kappa_{it} = w_{it}/\sum_i w_{it}$ zu einem aggregierten Quotienten
$z_t = \sum_i z_{it}\,\kappa_{it} = \sum_i v_{it}/\sum_i w_{it}$.

Allen bisherigen Beispielen zur Aggregation von Quartalsvariablen ist eines gemeinsam, durch die Aggregation ergibt sich stets eine Jahresvariable. Daß der zeitliche Abstand der den Variablen zuzuordnenden Realisationszeitpunkte bzw. der Länge der Realisationszeiträume der aggregierten Variablen im Vergleich zu den ursprünglichen Variablen größer ist, braucht nun aber nicht notwendigerweise erfüllt zu sein, um von einer Aggregation über die Zeit sprechen zu können. So ist die Saisonbereinigung einer Quartalsvariablen z nach der Methode der gleitenden Durchschnitte durch

$$(AA.7)\quad \bar{z} = \bar{G}'z = \begin{pmatrix} 1/4,1/4,1/4,1/4, 0, 0,\ldots, 0 , 0 , 0 , 0 \\ 0 ,1/4,1/4,1/4,1/4,0,\ldots, 0 , 0 , 0 , 0 \\ \vdots \\ 0 , 0 , 0 , 0 , 0 ,0,\ldots,1/4,1/4,1/4,1/4 \end{pmatrix} z$$

oder etwas genauer durch

$$(AA.8)\quad \bar{z}^{*}=\bar{G}^{*}z = \begin{pmatrix} 1/8,1/4,1/4,1/4,1/8, 0 ,\ldots, 0 , 0 , 0 , 0 , 0 \\ 0 ,1/8,1/4,1/4,1/4,1/8,\ldots, 0 , 0 , 0 , 0 , 0 \\ \vdots \\ 0 , 0 , 0 , 0 , 0 , 0 ,\ldots,1/8,1/4,1/4,1/4,1/8 \end{pmatrix} z$$

als eine Aggregation über die Zeit aufzufassen, obwohl sich die zeitlichen Abstände der Realisationszeitpunkte bzw. die Längen der Realisationszeiträume von ursprünglicher und aggregierter Variabler nicht unterscheiden. Desgleichen kann die Bildung von Differenzen erster oder höherer Ordnung zu einer variablen oder festen Basis als Aggregation über die Zeit verstanden werden. Diesen Aggregationen ist eine Verkürzung des Zeithorizonts gemeinsam.

Zusammenfassend sei immer dann von einer Aggregation über die Zeit gesprochen, wenn die aus den ursprünglichen Variablen abgeleiteten aggregierten Variablen nicht nur durch die Zeit zu ordnen sind, es also aggregierte Zeitpunkte bzw. Zeiträume gibt, denen die Variablen zuzuordnen sind, sondern auch unmittelbar eine ökonomische Bedeutung haben. Es ist dabei nicht notwendig, daß sich die aggregierten Variablen in äquidistanten Zeitabständen oder Perioden gleicher Periodenlänge realisieren.

Es soll im folgenden ganz allgemein unter einer Aggregation eine singuläre lineare Transformation verstanden werden, der eine sich im $\mathbb{R}^T$ realisierende ursprüngliche Variable z unterworfen wird, und die zu einer sich im $\mathbb{R}^S (S<T)$[1] realisierenden aggregierten Variablen $\bar{z}$ über

(A) $\bar{z} = G'z$

führt. Entsprechend soll die (SxT) Matrix G' Aggregationsmatrix genannt werden. Da nun durch diese allgemeine Definition in keiner Weise dem in obigen Abschnitten herausgestellten ökonomischen Bezug Rechnung getragen wird, bedarf diese Definition einer Rechtfertigung.

Es ist beabsichtigt, sich im Rahmen der Modelle (M),(M') und (M") stellende und auf eine Aggregation der in diesen Modellen berücksichtigten Variablen zurückzuführende Probleme in möglichst allgemeiner Form darzustellen und entsprechend Lösungen vorzuschlagen. Eingedenk der oben aufgezeigten Vielfalt, durch die eigentlich die Unmöglichkeit einer über die Singularität der Transformation hinausgehenden formalen Berücksichtigung von inhaltlichen auf den ökonomischen Bezug zurückzuführenden an die Transformation zu stellenden Anforderungen belegt wird, sowie der angestrebten Allgemeinheit der Aussagen erscheint die obige allgemeine Definition der Aggregation angemessen. Sie ist umso mehr gerechtfertigt, als auch den Modellen (M), (M') und (M") in dieser allgemeinen Form natürlich ein direkter ökonomischer Bezug fehlt. Damit nun aber dieser Bezug nicht vollkommen verloren geht, werden die Probleme exemplarisch beleuchtet und Lösungen im Rahmen spezieller Modelle abgeleitet, und dabei wird natürlich nur auf Transformationen zurückgegriffen, die auch den inhaltlichen Anforderungen genügen. Dann aber wird von einer Darstellung der Aggregation mit Hilfe von Matrizen abgegangen werden müssen, sofern dies schon bei der Beschreibung der speziellen Modelle geschehen ist.

---

1) Zwar gelten Aussagen, die im folgenden gemacht werden, auch für S=T, jedoch sollte, um mit Berechtigung von einer Aggregation zu sprechen, S<T gelten.

2.3. Ökonometrische Modelle mit aggregierten Variablen

Vorgegeben sei ein Modell für ursprüngliche Variable $y, x_1, x_2, \ldots, x_n$ und u. Ergeben sich aggregierte Variable $\bar{y}, \bar{x}_1, \bar{x}_2, \ldots, \bar{x}_n$ und $\bar{u}$ durch

$$\bar{y}=G'y,\ \bar{x}_1=G'x_1,\ \bar{x}_2=G'x_2,\ \ldots,\bar{x}_n=G'x_n,\ \bar{u}=G'u$$

aus den ursprünglichen Variablen, so ist wegen

$$E(u)=o \Rightarrow E(\bar{u})=o$$

$$E(uu')=\sigma^2 I \Rightarrow E(\bar{u}\bar{u}')=\sigma^2 G'G$$

$$E(uu')=\sigma^2 \Sigma \Rightarrow E(\bar{u}\bar{u}')=\sigma^2 G'\Sigma G$$

$$E(uu')=\sum_{i\in\mathfrak{J}} \omega_i^2 \Omega_i \Rightarrow E(\bar{u}\bar{u}')=\sum_{i\in\mathfrak{J}} \omega_i^2 G'\Omega_i G$$

einzusehen, daß durch das Modell (M) das Modell

(M̄) $\bar{y}=\bar{X}\beta+\bar{u};\ E(\bar{u})=o,\ E(\bar{u}\bar{u}')=\sigma^2 G'G;\ \beta\in\mathbb{R}^n,\ o<\sigma^2<\infty;$

durch das Modell (M') das Modell

(M̄') $\bar{y}=\bar{X}\beta+\bar{u};\ E(\bar{u})=o,\ E(\bar{u}\bar{u}')=\sigma^2 G'\Sigma G;\ \beta\in\mathbb{R}^n,\ o<\sigma^2<\infty;$

und durch das Modell (M") das Modell

(M̄") $\bar{y}=\bar{X}\beta+\bar{u};\ E(\bar{u})=o,\ E(\bar{u}\bar{u}')=\sum_{i\in\mathfrak{J}} \omega_i^2 G'\Omega_i G;\ \beta\in\mathbb{R}^n,\ o<\omega_i^2<\infty\ \forall i\in\mathfrak{J}$

mit entsprechenden Annahmen über die Matrizen Ω_i impliziert wird. Die zur Spezifikation der ursprünglichen Modelle herangezogenen a priori Informationen und a priori Hypothesen gestatten also die Spezifikation von entsprechenden nur noch aggregierte Variable enthaltenden Modellen.

Exkurs: Ein Spezifikationsproblem

Ergeben sich die aggregierten Variablen durch

$$\bar{y}=G'y,\ \bar{X}=G'XK,\ \bar{u}=G'u$$

wobei die (nxm) Matrix K eine weitere mit $m<n$ zeilensinguläre Aggregationsmatrix ist, so wird zwar, um nur einen Fall darzustellen, durch das Standardmodell das Modell

$$\bar{y}=G'X\beta+\bar{u},\ E(\bar{u})=o,\ E(\bar{u}\bar{u}')=\sigma^2 G'G,\ \beta\in\mathbb{R}^n,\ o<\sigma^2<\infty$$

impliziert, das nur noch aggregierte Variable enthaltende Modell

(M̄*) $\bar{y}=\bar{X}\gamma+\bar{u},\ E(\bar{u})=o,\ E(\bar{u}\bar{u}')=\sigma^2 G'G,\ \gamma\in\mathbb{R}^m,\ o<\sigma^2<\infty$

erhält man jedoch erst durch die singuläre Reparametrisierung $\beta=K\gamma$. Offensichtlich sind die bei der Spezifikation des ursprünglichen Modells eingebrachten a priori Informationen und a priori Hypothesen nicht ausreichend, daraus die Spezifikation des aggregierten Modells abzuleiten. Ist also die Dimension des Parameterraumes im aggregierten Modell, impliziert durch die Aggregationsvorschrift, kleiner als im ursprünglichen Modell, so kann es kein dem ursprünglichen Modell entsprechendes aggregiertes Modell geben, tritt zwangsläufig dieses als Aggregationsproblem zu bezeichnende Spezifikationsproblem auf. Erst wenn die Dimension des Parameterraumes im ursprünglichen Modell durch die Nebenbedingung $(I-KK^{+})\beta=o$ entsprechend verkleinert wird, kann das aggregierte aus dem ursprünglichen Modell abgeleitet werden.[1] Sofern sich jedoch diese Nebenbedingungen nicht rechtfertigen lassen, man denke etwa an die Nebenbedingung $\beta_1=\ldots=\beta_p=\beta$, wenn das ursprüngliche (mikroökonomische) Modell

$$y_i=X_i\beta_i+u_i,\ E(u_i)=o,\ E(u_iu_i')=\sigma_i^2I_T,\ E(u_iu_j')=o\ \forall\ i\neq j$$
$$\beta_i\in\mathbb{R}^n,\ o<\sigma_i^2<\infty,\ i=1,2,\ldots,p$$

in das aggregierte (makroökonomische) Modell

$$\Sigma y_i=\Sigma X_i\beta+\Sigma u_i,\ E(\Sigma u_i)=o,\ E(\Sigma u_i\ \Sigma u_i')=\Sigma\ \sigma_i^2I_T,\ \beta\in\mathbb{R}^n,\ o<\Sigma\sigma_i^2<\infty$$

zu überführen ist, wird stets zwischen ursprünglichem und aggregiertem Modell eine nicht zu überbrückende Lücke klaffen, die es notwendig macht, für das aggregierte Modell eine andere nicht aus dem ursprünglichen Modell abzuleitende Rechtfertigung zu finden.

Neben dem Modell (M), um nur einen Fall darzustellen[2], gibt es eine Vielzahl weiterer Modelle $(\tilde{M}_r)$, die, wenn man die Variablen dieser Modelle derselben Aggregation unterwirft,

---

1) Das Aggregationsproblem tritt übrigens auch dann nicht auf, wenn $XKK^{+}=X$ gilt. Dann jedoch ist die E-Struktur des Modells (M) nicht identifizierbar.

2) Entsprechende Oberlegungen sind ohne Schwierigkeiten auch für die Modelle (M') und (M") anzustellen.

ebenfalls das Modell $(\bar{M})$ implizieren. Denn sei H_r eine (Txr) Matrix, in der r linear unabhängige Variable zusammengefaßt sind und die sich durch die Eigenschaft $\mathcal{M}(H_r) \subseteq \mathcal{M}(G)$[1] auszeichnet, so wird durch das Modell

$(\tilde{M}_r)$ $y=X\beta+H_r\gamma_r+u$; $E(u)=o$, $E(uu')=\sigma^2 I$; $\beta \in \mathbb{R}^n, \gamma_r \in \mathbb{R}^r$, $o<\sigma^2<\infty$

auch das aggregierte Modell $(\bar{M})$ impliziert. Vergleicht man nun das Modell $(\tilde{M}_r)$ mit dem Modell (M), so wird deutlich, daß dem Modell $(\tilde{M}_r)$ eine vergleichsweise abgeschwächte E-Spezifikation zugrunde liegt.

Mit r=T-rgG ist ein Modell gefunden, an dem die Auswirkung der Aggregation auf die E-Spezifikation in vollem Umfang zutage tritt. Denn die E-Spezifikation dieses Modells kann nicht noch weiter abgeschwächt werden, wenn das aggregierte Modell $(\bar{M})$ impliziert werden soll. Oder anders ausgedrückt, zur E-Spezifikation des aggregierten Modells $(\bar{M})$ benötigt man nur das a priori Wissen und die a priori Hypothesen, die zur E-Spezifikation des Modells $(\tilde{M}_r)$ mit r=T-rgG notwendig sind. Durch die Aggregation ist man der Möglichkeit beraubt, das a priori Wissen bzw. die a priori Hypothese $\gamma_r=o$, die den Ausschluß der Variablen H_r bewirkt, bei der E-Spezifikation des aggregierten Modells auszunutzen, wird man also so gestellt, als ob die in der Matrix H_r zusammengefaßten Variablen nicht ausgeschlossen sind.

Mit der durch die Aggregation implizit bewirkten E-Spezifikationsabschwächung sind zwei Konsequenzen verbunden. Auf der einen Seite sinkt durch die Aggregation das Fehlspezifikationsrisiko, indem ein bei der Spezifikation des Modells (M) irrtümlich vorgenommener Ausschluß einer Variablen aus $\mathcal{M}(H_r)$ nicht zu einer Fehlspezifikation des aggregierten Modells $(\bar{M})$ führt. Auf der anderen Seite bewirkt ein (erzwungener) Verzicht auf a priori Wissen und a priori Hypothesen, daß a priori mehr Strukturen zugelassen werden als eigentlich notwendig sind. Die Präzision des Modells nimmt also ab.

---

1) $\mathcal{M}$ und $\mathcal{N}$ sind wie folgt definiert :

$\mathcal{M}(A) = \{x \mid x = Ay\}$
$\mathcal{N}(A) = \{x \mid Ax = O\}$

Diese Überlegungen sind natürlich auch auf die V-Spezifikation auszudehnen. Denn sei H_s eine (Txs) Matrix, für die ebenfalls $\mathcal{M}(H_s) \subset \mathcal{N}(G)$ gilt, so wird auch durch das Varianzkomponentenmodell

$$(\tilde{M}_{r,s}) \qquad \begin{array}{l} y=X\beta+H_r\gamma_r+u;\ E(u)=o,\ E(uu')=\sigma^2(I-P_s)+\lambda^2P_s; \\ \beta\in\mathbb{R}^n,\ \gamma_r\in\mathbb{R}^r,\ o<\sigma^2<\infty,\ o<\lambda^2<\infty;\ P_s=H_s(H_s'H_s)^{-1}H_s' \end{array}$$

das Modell $(\bar{M})$ impliziert, die die V-Spezifikation verschärfende a priori Information bzw. Hypothese $\sigma^2=\lambda^2$ wird also durch die Aggregation wertlos.

Wie bei jeder Spezifikationsabschwächung ist auch bei der durch die Aggregation verursachten Spezifikationsabschwächung der Identifizierbarkeit der Struktur Beachtung zu schenken. Da mit dem Übergang vom ursprünglichen zum aggregierten Modell beabsichtigt wird, das nicht direkt mit ökonometrischen Methoden zu behandelnde ursprüngliche Modell indirekt über das aggregierte Modell zu behandeln, muß zuerst einmal untersucht werden, ob die E-Struktur des ursprünglichen im aggregierten Modell identifizierbar ist. Wegen

$$rg\bar{X}=n \Leftrightarrow \mathcal{N}(X')=\mathcal{O} \text{ und } \mathcal{M}(X)\cap\mathcal{N}(G)=\mathcal{O}$$

ist einzusehen, daß dafür die E-Identifizierbarkeit des ursprünglichen Modells ($\mathcal{N}(X')=\mathcal{O}$) zwar notwendig, jedoch nicht hinreichend ist. Vielmehr kann der Umweg über eines der aggregierten Modelle $(\bar{M})$, $(\bar{M}')$ oder $(\bar{M}'')$ nur dann eingeschlagen werden, wenn das bezüglich der E-Spezifikation schwächste Modell $(\tilde{M}_r)$, $(\tilde{M}_r')$ bzw. $(\tilde{M}_r'')$ E-identifizierbar ist.[1)]

Der V-Identifizierbarkeit ist natürlich nur bei der Aggregation eines Varianzkomponentenmodells Beachtung zu schenken. In Analogie zur E-Identifizierbarkeit müssen dann die Matrizen $G'\Omega_1G$, $G'\Omega_2G$,... linear unabhängig sein. Wenn, und das wird später immer vorausgesetzt werden, die Matrizen $G(G'G)^+G'$ und $\Omega_1,\Omega_2,\ldots$ vertauschbar sind, so ist die lineare Unabhängigkeit gewährleistet, wenn

$$G'\Omega_iG\neq o \quad \forall i\in\mathcal{J} \text{ d.h. } \mathcal{M}(\Omega_i)\not\subset\mathcal{N}(G) \quad \forall i\in\mathcal{J}$$

gilt.

---

1) Man beachte, daß es wegen $\mathcal{M}(\bar{X})\subset\mathcal{M}(G')$ durch eine möglicherweise singuläre Kovarianzmatrix der aggregierten Störvariablen keine impliziten, die E-Identifizierbarkeit herbeiführende Nebenbedingungen geben kann.

3. Schätzung und Test

Ausgegangen wird im folgenden stets von einem Modell, das Variable enthält, deren Realisationen zumindest teilweise nicht zu erheben oder nicht erhoben worden sind. Stattdessen soll es aus diesen Variablen aufgrund einer Aggregationsvorschrift abzuleitende aggregierte Variable geben, deren Realisationen vollständig und fehlerfrei beobachtet worden sind.

Dargestellt wird nun, wie die Struktur des ursprünglichen Modells in einem nur noch aggregierte Variable enthaltenden aggregierten Modell zu schätzen ist und Hypothesen über die Struktur zu testen sind. Unterstellt wird dabei stets, daß das ursprüngliche und somit auch das durch die Aggregationsvorschrift implizierte aggregierte Modell richtig spezifiziert und die Struktur des ursprünglichen Modells im aggregierten Modell identifizierbar ist.

3.1. Schätzung der E-Struktur

3.1.1. Beispiele

Das Schätzproblem sei vorab exemplarisch beleuchtet, indem einige Zeitreihen- und Querschnittsmodelle sowie Modelle zur Kombination von Zeitreihen und Querschnitten als ursprüngliche Modelle zugrunde gelegt und verschiedene zum Teil schon oben erläuterte Aggregationsvorschriften auf die in diesen Modellen auftretenden Variablen angewandt werden. Es wird zuerst das aggregierte Modell spezifiziert und dann die geeignete Schätzfunktion angegeben werden.

Sei von einem einfachen Zeitreihenmodell ausgegangen, das eine sich in Quartalen $i=1,2,3,4$ und Jahren $t=1,2,\ldots,T$ realisierende Variable y_{it} linear durch die Variablen $x_{1it},\ldots,x_{nit}$ sowie die Störvariable u_{it} erklärt, und das durch

$$
\begin{aligned}
& y_{it}=x_{it}'\beta+u_{it} \qquad i=1,2,3,4; \quad t=1,2,\ldots,T; \\
(Z) \quad & E(u_{it})=0 \;\forall\; i,t; \; E(u_{it}^2)=\sigma^2 \;\forall\; i,t; \\
& E(u_{it}u_{jt'})=0 \;\forall\; (i,t)\neq(j,t'); \; \beta\in\mathbb{R}^n; \; 0<\sigma^2<\infty
\end{aligned}
$$

vollständig spezifiziert ist. Liegen nun aber mit $T=T_1+T_2$ erst ab dem (T_1+1)-ten Jahr Beobachtungswerte für die Quartalsvariablen vor, während für die vorhergehenden Jahre nur die Beobachtungswerte entsprechender Jahresvariablen vorhanden sind, ein nicht selten anzutreffender Fall, so muß nach einem Modell gesucht werden, das nur noch beobachtete Variable enthält.

Wie nun die entsprechenden Jahresvariablen aus den Quartalsvariablen abzuleiten sind und wie somit das aggregierte Modell zu spezifizieren ist, wird durch den ökonomischen Sachverhalt bestimmt, der den ursprünglichen und aggregierten Variablen zugrunde liegt. Zu unterscheiden ist dabei zwischen Variablen, durch die eine einer jeden Periode zuzuordnende Extensität, etwa ein am Periodenende vorhandener Bestand, ein während einer Periode entstehender Strom, oder eine Intensität, etwa ein während einer Periode gültiger Preis, festgehalten wird.

Beschreiben nun alle Variablen Bestände, so liegt das nur noch beobachtete Variable enthaltende aggregierte Modell

$$
(\overline{Z}.1)\qquad
\begin{aligned}
&y_{4t} = x_{4t}'\beta + u_{4t} \qquad t=1,2,\ldots,T_1\\
&y_{it} = x_{it}'\beta + u_{it} \qquad t=T_1+1,\ldots,T_1+T_2;\ i=1,2,3,4\\
&E(u_{it})=0 \ \forall\, i,t;\ E(u_{it}^2)=\sigma^2 \quad i,t\\
&E(u_{it}u_{jt'})=0 \ \forall\,(i,t)\neq(j,t');\quad \beta\in\mathbb{R}^n;\ 0<\sigma^2<\infty
\end{aligned}
$$

auf der Hand. Auch die Schätzung der Struktur wirft keinerlei Probleme auf und kann durch die einfache KQ-Methode mit

$$
\hat{\beta}_{(1)}=\Big\{\sum_{t=1}^{T_1} x_{4t}\,x_{4t}'+\sum_{t=T_1+1}^{T_1+T_2}\sum_i x_{it}\,x_{it}'\Big\}^{-1}\Big\{\sum_{t=1}^{T_1} x_{4t}\,y_{4t}+\sum_{t=T_1+1}^{T_1+T_2}\sum_i x_{it}y_{it}\Big\}
$$

und

$$
V(\hat{\beta}_{(1)})=\sigma^2\Big\{\sum_{t=1}^{T_1} x_{4t}\,x_{4t}'+\sum_{t=T_1+1}^{T_1+T_2}\sum_i x_{it}\,x_{it}'\Big\}^{-1}
$$

vorgenommen werden.

Geben alle Variablen Ströme wieder, so ist für die ersten T_1 Jahre über die Quartale zu summieren. Es ergibt sich das aggregierte Modell

$$\sum_i y_{it} = \sum_i x_{it}'\beta + \sum u_{it} \quad t=1,2,\ldots,T_1 \;;$$

$$y_{it} = x_{it}'\beta + u_{it} \quad t=T_1+1,\ldots,T_1+T_2;\; i=1,2,3,4;$$

$$(\bar{Z}.2)\quad \left.\begin{array}{l} E(\sum_i u_{it})=0 \\ E(\sum_i u_{it})^2=4\,\sigma^2 \end{array}\right\} \forall\; t\le T_1; \qquad \left.\begin{array}{l} E(u_{it})=0 \\ E(u_{it}^2)=\sigma^2 \end{array}\right\} \forall\, i,t>T_1$$

$$E(\sum_i u_{it} \sum_i u_{it'})=0 \;\forall\; t\neq t', t,t'\le T_1; E(\sum_i u_{it}u_{jt'})=0, t\le T_1, t'>T_1$$

$$E(u_{it}u_{jt'})=0 \forall (i,t)\neq(j,t'),\; t,t'>T_1;\; \beta\in\mathbb{R}^n;\; 0<\sigma^2<\infty,$$

das aber eine heteroskedastische Störvariable enthält und somit nicht durch die einfache KQ-Methode effizient geschätzt wird. Der Heteroskedastizität kann jedoch bei der Schätzung Rechnung getragen werden, indem man die Schätzfunktion

$$\underset{(2)}{\hat{\beta}} = \{\sum_{t=1}^{T_1}\{\sum_i x_{it}\sum_i x_{it}'\}\tfrac{1}{4} + \sum_{t=T_1+1}^{T_1+T_2}\sum_i x_{it}x_{it}'\}^{-1}\{\sum_{t=1}^{T_1}\{\sum_i x_{it}\sum_i y_{it}\}\tfrac{1}{4} + \sum_{t=T_1+1}^{T_1+T_2}\sum_i x_{it}y_{it}\}$$

mit

$$V(\underset{(2)}{\hat{\beta}}) = \sigma^2\{\sum_{t=1}^{T_1}\{\sum_i x_{it}\sum_i x_{it}'\}\tfrac{1}{4} + \sum_{t=T_1+1}^{T_1+T_2}\sum_i x_{it}x_{it}'\}^{-1}$$

anwendet.

Liegen schließlich allen Variablen Intensitäten zugrunde, so müssen, damit überhaupt ein durch das ursprüngliche Modell impliziertes aggregiertes Modell existiert, die Gewichte, mit denen die Quartalsintensitäten in die Jahresintensität eingehen, für alle Variablen gleich sein. Wird dies durch die Gewichte κ_{it} geleistet, so läßt sich das heteroskedastische aggregierte Modell

$$\sum_i \kappa_{it}\, y_{it} = \sum_i \kappa_{it} x_{it}'\beta + \sum_i \kappa_{it} u_{it} \quad t=1,2,\ldots,T_1$$

$$y_{it} = x_{it}'\beta + u_{it} \quad t=T_1+1,\ldots,T_1+T_2,\; i=1,2,3,4$$

$$(\bar{Z}.3)\quad \left.\begin{array}{l} E(\sum_i \kappa_{it}u_{it})=0 \\ E(\sum_i \kappa_{it}u_{it})^2=\sigma^2\sum_i \kappa_{it}^2 \end{array}\right\} \forall\, t\le T_1; \qquad \left.\begin{array}{l} E(u_{it})=0 \\ E(u_{it}^2)=\sigma^2 \end{array}\right\} \forall\; i,t>T_1$$

$$E(\sum_i \kappa_{it}u_{it}\sum_i \kappa_{it'}u_{it'})=0 \;\forall\; t\neq t', t,t'\le T_1; E(\sum_i \kappa_{it}u_{it}u_{jt'})=0, t\le T_1, t'>T_1$$

$$E(u_{it}u_{jt'})=0 \;\forall\; (i,t)\neq(j,t'); t,t'>T_1; \beta\in\mathbb{R}^n;\; 0<\sigma^2<\infty$$

spezifizieren und dessen Schätzung analog zu obigem Vorgehen durchführen, sofern man nicht nur weiß, daß den aggregierten Variablen ein gemeinsames Gewichtungsschema zugrundeliegt, sondern diese Gewichte auch kennt und somit $\sum_i \kappa_{it}^2$ für alle t berechnen kann.[1)]

Ein aggregiertes Modell, das nicht nur durch Heteroskedastizität, sondern auch durch Autokorrelation der Störvariablen gekennzeichnet ist, ergibt sich, wenn dem ursprünglichen Modell Quartalsvariablen zugrunde liegen, durch die absolute Zuwächse repräsentiert werden. Sind, einen Zeitraum von T Jahren unterstellt, statt der 4T-1 Realisationen einer jeden Quartalsvariablen nur T_1-1 Realisationen der entsprechenden Jahresvariablen für den die ersten T_1 Jahre umfassenden Zeitraum und dann aber jeweils $4T_2$ Realisationen der Quartalsvariablen für den die letzten T_2 Jahre umfassenden Zeitraum beobachtet worden, so führt dies zur Spezifikation des aggregierten Modells [2)]

$$\sum_{i=1}^{4}\{y_{it-1}(i-1)+y_{it}(5-i)\}=\sum_{i=1}^{4}\{x'_{it-1}(i-1)+x'_{it}(5-i)\}\beta$$

$$+\sum_{i=1}^{4}\{u_{it-1}(i-1)+u_{it}(5-i)\};\ t=2,3,..,T_1$$

$$y_{it}=x_{it}'\beta+u_{it};\ t=T_1+1,\ldots,T_1+T_2;\ i=1,2,3,4$$

$$(\overline{2}.4)\quad E\Big(\sum_{i=1}^{4}\{u_{it-1}(i-1)+u_{it}(5-1)\}\Big)=0\ \forall\ t=2,\ldots,T_1;\ E(u_{it})=0\forall\ i,t>T_1$$

$$E\Big(\sum_{i=1}^{4}\{u_{it-k-1}(i-1)+u_{it-k}(5-i)\}\sum_{i=1}^{4}\{u_{it-l-1}(i-1)+u_{it-l}(5-i)\}\Big)=\begin{cases}44\sigma^2 & k=l\\ 10\sigma^2 & k-l=1\\ \cdot & \\ 0 & k-l>1\end{cases}$$

$$t=2,\ldots,T_1;\ 2\leq t-k,t-l\leq T_1$$

$$E\Big(\sum_{i=1}^{4}\{u_{it-1}(i-1)+u_{it}(5-i)\}u_{jt'}\Big)=0\quad t=2,\ldots,T_1\ t'>T_1;$$

---

1) Liegen etwa statt Durchschnittskosten pro Quartal die entsprechenden Durchschnittskosten pro Jahr vor, so muß man die auf die einzelnen Quartale entfallenden Anteile κ_{it} an der Jahresproduktion kennen, um $\sum_i \kappa_{it}^2$ berechnen zu können.

2) vgl. A. Zellner und C. Montemarquette (1971), Seite 336

$$E(u_{it}^2)=\sigma^2 \;\forall\; i,t>T_1;\; E(u_{it}u_{jt'})=o \;\forall\; (i,t)\neq(j,t'),t,t'>T_1;$$

$$\beta\in\mathbb{R}^n;\; o<\sigma^2<\infty.$$

Denn sei ζ_{it} eine Variable, deren absoluter Quartalszuwachs durch z_{it} wiedergegeben wird, sei also

$$z_{it} = \zeta_{it} - \zeta_{i-1\ t} \quad i=2,3,4$$

$$z_{1t} = \zeta_{1t} - \zeta_{4\ t-1},$$

so ist der absolute Jahreszuwachs durch

$$\sum_{i=1}^{4}(\zeta_{it}-\zeta_{i\ t-1})=\sum_{i=2}^{4}z_{it-1}(i-1)+\sum_{i=1}^{4}z_{it}(5-i)=\sum_{i=1}^{4}\{z_{it-1}(i-1)+z_{it}(5-i)\}$$

zu bestimmen. Verdeutlicht wird dadurch noch, daß durch die Variablen des ursprünglichen Modells absolute Veränderungen von Strömen repräsentiert werden müssen, denn nur dann ist diese Aggregationsvorschrift sinnvoll. Zur Schätzung der Struktur dieses Modells kann nun, da die Kovarianzmatrix der aggregierten Störvariablen bekannt ist, stets die verallgemeinerte KQ-Methode herangezogen werden.

Sei nun ein einfaches Querschnittsmodell zugrunde gelegt, in dem eine sich bei ökonomischen Einheiten realisierende Variable y_i linear durch die Variablen $x_{1i},\ldots,x_{ni}$ und u_i erklärt wird, wobei i ein Element der Indexmenge $\mathfrak{I}$ ist, die die Menge der ökonomischen Einheiten repräsentiert. Sei somit, die entsprechenden a priori Hypothesen für die Störvariable unterstellt, von dem linearen Standardmodell

$$y_i=x_i'\beta+u_i \quad i\in\mathfrak{I}$$

$$(Q)\quad E(u_i)=o\;\forall i\in\mathfrak{I};\; E(u_i^2)=\sigma^2\;\forall i\in\mathfrak{I};\; E(u_iu_j)=o\;\forall i\neq j,i,j\in\mathfrak{I}$$

$$\beta\in\mathbb{R}^n;\; o<\sigma^2<\infty$$

ausgegangen. Sind nun aber die ökonomischen Einheiten zu Gruppen zusammengefaßt und nur die Realisationen der diesen

Gruppen zuzuordnenden Variablen beobachtet worden, ist das ursprüngliche Modell wiederum so zu aggregieren, daß nur noch beobachtete Variable im aggregierten Modell berücksichtigt sind. Wie das aggregierte Modell dann auszusehen hat, wird zum einen durch die Art der Gruppenbildung, zum anderen durch den Charakter von ursprünglichen und aggregierten Variablen bestimmt.

Sei $\mathfrak{A}$ jenes Merkmal mit den Merkmalsausprägungen $a_1, a_2, \ldots, a_s$, durch das die ökonomischen Einheiten zu S Gruppen, aggregierten ökonomischen Einheiten, zusammengefaßt werden können, die Indexmenge $\mathfrak{I}$ entsprechend in S paarweise disjunkte Teilmengen $\mathfrak{I}(a_1), \ldots, \mathfrak{I}(a_s)$ zerlegt werden kann. Werden durch alle Variablen Extensitäten beschrieben, ist also die Aggregation durch eine einfache Summation durchzuführen, so ergibt sich das aggregierte Modell

$$\sum_{i\in\mathfrak{I}(a_k)} y_i = \sum_{i\in\mathfrak{I}(a_k)} x_i'\beta + \sum_{i\in\mathfrak{I}(a_k)} u_i,\quad k=1,2,\ldots,S$$

$$(\bar{Q}.1)\quad E\Big(\sum_{i\in\mathfrak{I}(a_k)} u_i\Big)=0\ \forall\ k;\ E\Big(\sum_{i\in\mathfrak{I}(a_k)} u_i\Big)^2 = h(a_k)\cdot\sigma^2\ \forall\ k;$$

$$E\Big(\sum_{i\in\mathfrak{I}(a_k)} u_i \sum_{i\in\mathfrak{I}(a_l)} u_i\Big)=0\ \forall\ k\neq l;\ \beta\in\mathbb{R}^n;\ 0<\sigma^2<\infty$$

dessen Struktur, wenn die Häufigkeiten $h(a_k)$ bekannt sind, effizient durch

$$\check{\beta}_{(\mathfrak{A})} = \Big\{\sum_{k=1}^{S}\Big\{\sum_{i\in\mathfrak{I}(a_k)} x_i \sum_{i\in\mathfrak{I}(a_k)} x_i'\Big\}\cdot h\frac{1}{(a_k)}\Big\}^{-1}\Big\{\sum_{k=1}^{S}\Big\{\sum_{i\in\mathfrak{I}(a_k)} x_i \sum_{i\in\mathfrak{I}(a_k)} y_i\Big\}\cdot h\frac{1}{(a_k)}\Big\}$$

mit

$$V\big(\check{\beta}_{(\mathfrak{A})}\big)=\sigma^2\Big\{\sum_{k=1}^{S}\Big\{\sum_{i\in\mathfrak{I}(a_k)} x_i \sum_{i\in\mathfrak{I}(a_k)} x_i'\Big\}h\frac{1}{(a_k)}\Big\}^{-1}$$

geschätzt werden kann.

Wenn es neben dem Merkmal $\mathfrak{A}$ noch das Merkmal $\mathfrak{B}$ mit den Merkmalsausprägungen $b_1, b_2, \ldots, b_R$ gibt, das zur Bildung aggregierter ökonomischer Einheiten herangezogen worden ist, so

ist es zum einen möglich, R·S aggregierte ökonomische Einheiten zu bilden, die Indexmenge in R·S paarweise disjunkte Teilmengen $\mathfrak{J}(a_1,b_1),\ldots,\mathfrak{J}(a_k,b_l),\ldots,\mathfrak{J}(a_S,b_R)$ zerlegt. Zum anderen kann man zusätzlich zu den auf Grund des Merkmals $\mathcal{A}$ gebildeten S aggregierten ökonomischen Einheiten noch weitere R aggregierte ökonomische Einheiten bilden, indem man die Indexmenge in diesmal R wiederum paarweise disjunkte Teilmengen $\mathfrak{J}(b_1),\ldots,\mathfrak{J}(b_R)$ zerlegt. Zu beachten ist dabei, daß nun aber nicht auch $\mathfrak{J}(a_k)$ und $\mathfrak{J}(b_l)$ für alle k und l disjunkt sein können.

Wieder auf die Aggregation von extensiven Variablen bezogen wird man bei Kenntnis der Realisation der Variablen $\sum_{i\in\mathfrak{J}(a_k,b_l)} y_i$ und $\sum_{i\in\mathfrak{J}(a_k,b_l)} x_i$ für alle k und l, also der Zellensummen, auf das aggregierte Modell

$$\sum_{i\in\mathfrak{J}(a_k,b_l)} y_i = \sum_{i\in\mathfrak{J}(a_k,b_l)} x_i'\beta + \sum_{i\in\mathfrak{J}(a_k,b_l)} u_i \quad k=1,2,..,S;l=1,2,..,R;$$

$$(\bar{Q}.2)\quad E\Big(\sum_{i\in(a_k,b_l)} u_i\Big)=o\ \forall\ k,l;\ E\Big(\sum_{i\in(a_k,b_l)} u_i\Big)^2=h(a_k,b_l)\sigma^2\ \forall\ k,l;$$

$$E\Big(\sum_{i\in\mathfrak{J}(a_k,b_l)} u_i \sum_{i\in\mathfrak{J}(a_j,b_r)} u_i\Big)=o\ \forall\ k\neq j,l\neq r;\ \beta\in|R^n;\ o<\sigma^2<\infty$$

zurückgreifen, wobei, um die verallgemeinerte KQ-Schätzung analog zu obigem Vorgehen durchführen zu können, die gemeinsame Häufigkeitsverteilung der Merkmale $\mathcal{A}$ und $\mathcal{B}$ bekannt sein muß. Sind aber nur die Randsummen bekannt, also die Realisationen der Variablen $\sum_{i\in\mathfrak{J}(a_k)} y_i$, $\sum_{i\in\mathfrak{J}(b_l)} y_i$, $\sum_{i\in\mathfrak{J}(a_k)} x_i$ und $\sum_{i\in\mathfrak{J}(b_l)} x_i$ festgestellt worden, so kann das aggregierte Modell

$$\sum_{i\in\mathfrak{J}(a_k)} y_i = \sum_{i\in\mathfrak{J}(a_k)} x_i'\beta + \sum_{i\in\mathfrak{J}(a_k)} u_i \quad k=1,2,\ldots,S$$

$$\sum_{i\in\mathfrak{J}(b_l)} y_i = \sum_{i\in\mathfrak{J}(b_l)} x_i'\beta + \sum_{i\in\mathfrak{J}(b_l)} u_i \quad l=1,2,\ldots,R$$

$$E\Big(\sum_{i\in\mathfrak{J}(a_k)} u_i\Big) = o \;\forall k; \quad E\Big(\sum_{i\in\mathfrak{J}(b_l)} u_i\Big) = o \;\forall l;$$

$$(\bar{Q}.3) \quad E\Big(\sum_{i\in\mathfrak{J}(a_k)} u_i\Big)^2 = h(a_k)\cdot\sigma^2 \;\forall k; E\Big(\sum_{i\in\mathfrak{J}(b_l)} u_i\Big)^2 = h(b_l)\cdot\sigma^2 \;\forall l;$$

$$E\Big(\sum_{i\in\mathfrak{J}(a_k)} u_i \sum_{i\in\mathfrak{J}(a_l)} u_i\Big) = o \;\forall k\neq l; E\Big(\sum_{i\in\mathfrak{J}(b_k)} u_i \sum_{i\in\mathfrak{J}(b_l)} u_i\Big) = o \;\forall k\neq l;$$

$$E\Big(\sum_{i\in\mathfrak{J}(a_k)} u_i \sum_{i\in\mathfrak{J}(b_l)} u_i\Big) = h(a_k,b_l)\cdot\sigma^2; \; \beta\in\mathbb{R}^n; \; o<\sigma^2<\infty$$

spezifiziert werden, das jedoch nicht nur durch eine heteroskedastische und autokorrelierte, sondern auch linear abhängige aggregierte Störvariable gekennzeichnet ist. Um dieses Modell effizient, also nach der verallgemeinerten KQ-Methode schätzen zu können, ist die Kenntnis nicht nur der Randverteilungen, durch die der Heteroskedastizität Rechnung getragen werden kann, sondern auch der gemeinsamen Verteilung der Merkmale $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{J}$ notwendig, um auch die Autokorrelation berücksichtigen zu können.

Enthält das ursprüngliche Modell nur intensive Variable, liegt also einer sinnvollen Variablenaggregation eine gewichtete Summation zugrunde, so kann, vorausgesetzt daß zu erklärende wie erklärende Variablen mit gleichen Gewichten zu summieren sind und nur ein Merkmal zur Gruppierung heranzuziehen ist, das aggregierte Modell

$$\sum_{i\in\mathfrak{J}(a_k)} \kappa_i y_i = \sum_{i\in\mathfrak{J}(a_k)} \kappa_i x_i'\beta + \sum_{i\in\mathfrak{J}(a_k)} \kappa_i u_i \quad k=1,2,\ldots,S$$

$$(\bar{Q}.4) \quad E\Big(\sum_{i\in\mathfrak{J}(a_k)} \kappa_i u_i\Big) = o \;\forall k; \; E\Big(\sum_{i\in\mathfrak{J}(a_k)} \kappa_i u_i\Big)^2 = \sigma^2 \sum_{i\in\mathfrak{J}(a_k)} \kappa_i^2 \;\forall k;$$

$$E\Big(\sum_{i\in\mathfrak{J}(a_k)} \kappa_i u_i \sum_{i\in\mathfrak{J}(a_l)} \kappa_i u_i\Big) = o \;\forall k\neq l; \; \beta\in\mathbb{R}^n; \; o<\sigma^2<\infty$$

nach der verallgemeinerten KQ-Methode geschätzt werden, wenn nicht nur die Realisationen der aggregierten Variablen sondern auch die Gewichte κ_i, genauer $\sum_{i\in\mathfrak{J}(a_k)} \kappa_i^2$ für alle k bekannt sind.

Abschließend sei noch ein Modell zur Kombination von Zeitreihen und Querschnitten vorgestellt. y_{it} sei wieder eine linear durch die Variablen $x_{1it},\ldots,x_{nit}$ und u_{it} zu erklärende Variable, wobei sich die Realisationen aller Variablen zu Zeitpunkten t bei ökonomischen Einheiten i einstellen mögen. Die Menge der zum Zeitpunkt t vorhandenen ökonomischen Einheiten sei schließlich noch durch die Indexmenge $\mathfrak{I}_t$ repräsentiert. Das lineare Standardmodell kann darauf aufbauend durch

$$y_{it} = x_{it}'\beta + u_{it},\ i\in\mathfrak{I}_t,\ t=1,2,\ldots,T;$$

$$(K)\quad E(u_{it})=0\ \forall\ t,i\in\mathfrak{I}_t;\ E(u_{it}^2)=\sigma^2\ \forall\ t,i\in\mathfrak{I}_t$$

$$E(u_{it}\,u_{jt'})=0\ \ \forall\,(i,t)\neq(j,t');\ \beta\in\mathbb{R}^n;\ 0<\sigma^2<\infty$$

spezifiziert werden. Nun wird nicht immer auf die Beobachtungswerte der Realisationen aller Variablen zu jedem Zeitpunkt für alle zum jeweiligen Zeitpunkt vorhandenen ökonomischen Einheiten zurückzugreifen sein. Stattdessen wird oft davon auszugehen sein, daß zumindest die über alle ökonomischen Einheiten aggregierten Variablen beobachtet worden sind, wenn die Beobachtung bei den einzelnen ökonomischen Einheiten nicht durchgeführt worden ist. Unter der Voraussetzung, daß die Aggregationsvorschrift für alle Variablen gleich ist, läßt sich analog zu obigem Vorgehen ein aggregiertes Modell angeben, das zur Strukturschätzung heranzuziehen ist. Die Heteroskedastizität eines solchen Modells ist jedoch nur dann zu berücksichtigen, wenn der Umfang der Indexmengen $\mathfrak{I}_t$ bekannt ist.

Exkurs: Ein weiteres Spezifikationsproblem

Auf ein besonderes Spezifikationsproblem ist an dieser Stelle noch hinzuweisen. Bei allen bisher besprochenen Beispielen wurde vorausgesetzt, daß es eine Aggregationsvorschrift gibt, durch die aus allen ursprünglichen endogenen wie exogenen Variablen die entsprechenden aggregierten Variablen abgeleitet werden. Nun gibt es aber Aggregationsvorschriften, die der Aggregation einer ursprünglichen Variablen aus ökonomischen Gründen nicht angemessen sind, indem durch die Anwendung einer solchen Aggregationsvorschrift eine aggregierte Variable

entsteht, der selbst kein als ökonomisch zu bezeichnender Sachverhalt zugrunde liegt. Ist eine Variable etwa über ökonomische Einheiten zu aggregieren, so ist durch eine ungewogene Summation nur dann sinnvoll zu aggregieren, wenn diese Variable extensiv ist. Handelt es sich jedoch um eine intensive Variable, wird eine gewogene Summation durchzuführen sein, damit der aggregierten Variablen unmittelbar eine ökonomische Bedeutung zukommt. Oder ist eine Variable über die Zeit zu aggregieren, so ist die Aggregation durch eine ungewogene Summation dem Charakter der Variablen angemessen, wenn es sich um eine Strömungsvariable handelt, nicht angemessen, wenn es sich um eine Bestandsvariable oder eine intensive Variable handelt. Ob eine Aggregationsvorschrift angemessen ist oder nicht, wird also, durch diese Beispiele belegt, sowohl auch den der ursprünglichen Variablen zugrunde liegenden ökonomischen Sachverhalt, also auch durch die Art der Realisation der ursprünglichen Variablen bestimmt.

Ist beispielsweise eine Aggregationsvorschrift heranzuziehen, die der erklärten Variablen angemessen ist, einer der erklärenden Variablen jedoch nicht, kann von einem ursprünglichen Modell ausgehend natürlich ein aggregiertes Modell spezifiziert werden. Nur enthält dieses Modell eine nicht als ökonomisch zu bezeichnende Variable, von der auch nicht unbedingt zu erwarten ist, daß ihre Realisationen beobachtet worden sind. Entsprechend ist von diesem aggregierten Modell natürlich auch nicht unbedingt zu erwarten, daß die Struktur überhaupt geschätzt werden kann.[1)] Berücksichtigt man aber statt der nicht adäquat aggregierten Variablen eine adäquat aggregierte Variable, so ergibt sich ein anderes aggregiertes Modell, bei dessen Spezifikation man sich nicht mehr auf die dem ursprünglichen Modell zugrundeliegenden a priori Hypothesen beziehen kann. Während das oben angesprochene Spezifikationsproblem[2)] noch durch eine Verschärfung der Spezifikation des

1) Unabhängig davon stellt sich die Frage, ob ein ökonometrisches Modell, das eine solche ökonomisch wenig sinnvolle Variable enthält, selbst überhaupt sinnvoll ist, ob es nicht vielmehr ein mit der durch das Modell untersuchten ökonomischen Hypothese verbundenes Aggregationsniveau gibt, das nicht überschritten werden darf.

2) vgl. Abschnitt 2.3. Exkurs

ursprünglichen Modells zu lösen war, zeichnet sich dieses Spezifikationsproblem dadurch aus, daß der zwischen dem ursprünglichen und dem der adäquat aggregierte Variable enthaltenden aggregierten Modell bestehende Widerspruch nur durch einen Ausschluß dieser Variable, eine besonders "problematische" Form der Spezifikationsverschärfung, zu beseitigen ist. Auftreten wird dieses Spezifikationsproblem immer dann, wenn unter den im ursprünglichen Modell berücksichtigten Variablen sowohl extensive als auch intensive Variable sind, aber auch, wenn nur intensive Variable im Modell enthalten sind. Wird über die Zeit aggregiert, so wird man mit diesem Problem schon dann konfrontiert, wenn sowohl Bestands- als auch Strömungsvariable im ursprünglichen Modell berücksichtigt, wenn durch die Variablen relative Zuwächse beschrieben, oder wenn die Variablen durch verschiedene Indizes bereinigt werden.

3.1.2. Allgemeine Schätzung

Vorausgesetzt, daß ein durch das ursprüngliche Modell impliziertes und nur noch beobachtete Variable enthaltendes aggregiertes Modell existiert, ist das Problem der E-Strukturschätzung auch einer allgemeinen Lösung zugänglich. Sei (M) das ursprüngliche Modell, (A) die Aggregationsvorschrift und somit ($\bar{M}$) das aggregierte Modell, so ist aufgrund der Daten $(\bar{y},\bar{X})$[1], die Kenntnis der Kovarianzmatrix $\sigma^2 G'G$ der aggregierten Störvariable zumindest bis auf den Parameter σ^2 vorausgesetzt, die E-Struktur durch

$$(\bar{S}.1)\quad \check{\beta}=\{\bar{X}'(G'G)^{+}\bar{X}\}^{-1}\bar{X}'(G'G)^{+}\bar{y}$$

mit einem Schätzfehler

$$(\bar{S}.2)\quad V(\check{\beta})=\sigma^2\{\bar{X}'(G'G)^{+}\bar{X}\}^{-1}$$

zu schätzen. Eine mögliche lineare Abhängigkeit der aggregierten Störvariablen, die dann ihren Niederschlag in einer singulären Matrix G'G findet, wirft jedoch wegen

---

1) Indem stets durch den Zusammenhang klar ist, ob von einer Variablen, ihrer Realisation oder dem festgestellten Wert ihrer Realisation gesprochen wird, kann auf eine unterschiedliche Bezeichnung verzichtet werden.

$$\{I-G'G(G'G)^{+}\}\bar{X}=\{G'-G'G(G'G)^{+}G'\}X = 0 \quad \forall X\in \mathbb{R}^{Txn}$$ 1)

keine Probleme auf. Die mögliche Singularität der Matrix G'G ist deshalb stets auf redundante Variablen, nicht jedoch auf implizite Nebenbedingungen für die Parameter ß zurückzuführen.

Daß diese Schätzung durch den im Vergleich zu allen anderen in $\bar{y}$ linearen und unverzerrten Schätzungen

$$\breve{\breve{\beta}}=C\,\bar{y} \quad \text{mit } C\,\bar{X}=I$$

kleinsten Schätzfehler gekennzeichnet ist, kann mit

$$C\,G'G(G'G)^{+}\bar{X} = C\,G'G(G'G)^{+}G'X = C\,G'X = C\,\bar{X}=I$$

und

$$C\,G'G\,C' - \{\bar{X}'(G'G)^{+}\bar{X}\}^{-1} =$$
$$C\,G'\{I-G(G'G)^{+}\bar{X}\{\bar{X}'(G'G)^{+}\bar{X}\}^{-1}\bar{X}'(G'G)^{+}G'\}\,G\,C'$$

sowie

$$G(G'G)^{+}\bar{X}\{\bar{X}'(G'G)^{+}\bar{X}\}^{-1}\bar{X}'(G'G)^{+}G'G(G'G)^{+}\bar{X}\{\bar{X}'(G'G)^{+}\bar{X}\}^{-1}\bar{X}'(G'G)^{+}G'=$$
$$G(G'G)^{+}\bar{X}\{\bar{X}'(G'G)^{+}\bar{X}\}^{-1}\bar{X}'(G'G)^{+}G'$$

gezeigt werden, denn dann ist

$$V(\breve{\breve{\beta}})-V(\breve{\beta})=\sigma^2\{C\,G'GC' - \{\bar{X}'(G'G)^{+}\bar{X}\}^{-1}\},$$

die Differenz der Schätzfehler, positiv semidefinit.

Ist nun das Modell (M') zugrunde zu legen, also die E-Struktur des Modells $(\bar{M}')$ zu schätzen, so ist analog vorzugehen. Denn da auch

$$\{I-G'\Sigma G(G'\Sigma G)^{+}\}\bar{X}=\{G'-G'\Sigma G(G'\Sigma G)^{+}G'\}X=0 \quad \forall X\in\mathbb{R}^{Txn}$$

gilt, ist bei bekannter Matrix G'ΣG die E-Struktur durch

$(\bar{S}'.1)$ $\quad \breve{\beta} = \{\bar{X}'(G'\Sigma G)^{+}\bar{X}\}^{-1}\,\bar{X}'(G'\Sigma G)^{+}\,\bar{y}$

mit einem Schätzfehler

$(\bar{S}'.2)$ $\quad V(\breve{\beta})=\sigma^2\{\bar{X}'(G'\Sigma G)^{+}\bar{X}\}^{-1}$

zu schätzen.

---

1) vgl. H. Theil (1971), Seite 278, Annahme 6.4

Wenn schließlich von dem Modell (M") auszugehen ist, so müssen neben den Matrizen $G'\Omega_i G$ die Verhältnisse zwischen den Varianzkomponenten ω_i^2 bekannt sein,[1] um die E-Struktur des Modells ($\bar{M}$") nach der verallgemeinerten KQ-Methode durch

$$(\bar{S}".1) \quad \check{\beta} = \{\bar{X}'(\sum_{i\in\mathfrak{z}} \omega_i^2 G'\Omega_i G)^+\bar{X}\}^{-1}\bar{X}'(\sum_{i\in\mathfrak{z}} \omega_i^2 G'\Omega_i G)^+ \bar{y}$$

mit

$$(\bar{S}".2) \quad V(\check{\beta}) = \{\bar{X}'(\sum_{i\in\mathfrak{z}} \omega_i^2 G'\Omega_i G)^+\bar{X}'\}^{-1}$$

schätzen zu können. Eine Vereinfachung ergibt sich, wenn die Matrizen P_G[2] und $\Omega_1, \Omega_2, \ldots$ vertauschbar sind, denn dann kann durch eine Überprüfung der vier die verallgemeinerte Inverse definierenden Bedingungen gezeigt werden, daß

$$\{G'\Sigma G\}^+ = (G'G)^+\{\sum_{i\in\mathfrak{z}} \omega_i^{-2} G'\Omega_i G\}(G'G)^+$$

gilt und somit die E-Struktur durch

$$(\bar{S}".1) \quad \check{\beta} = \{\sum_{i\in\mathfrak{z}} \omega_i^{-2} \bar{X}'(G'G)^+G'\Omega_i G(G'G)^+\bar{X}\}^{-1} \sum_{i\in\mathfrak{z}} \omega_i^{-2}\bar{X}'(G'G)^+G'\Omega_i G(G'G)^+ \bar{y}$$

mit

$$(\bar{S}".2) \quad V(\check{\beta}) = \{\sum_{i\in\mathfrak{z}} \omega_i^{-2} \bar{X}'(G'G)^+G'\Omega_i G(G'G)^+\bar{X}\}^{-1}$$

zu schätzen ist.

Durch die Beispiele, aber auch durch die allgemeine Problemstellung wird belegt, daß das Wissen um die Existenz einer der Aggregation aller Variablen zugrunde liegenden Aggregationsvorschrift nicht immer ausreicht, um aufgrund der Daten $(\bar{y},\bar{X})$ die verallgemeinerte KQ-Schätzung durchführen zu können. Es müssen dazu vielmehr noch Informationen über die Aggregationsvorschrift selbst vorhanden sein. Wenn es auch nicht notwendig ist, daß die Matrix G bekannt ist, so müssen doch zumindest je nach Modellspezifikation die Matrizen G'G, G'ΣG oder $G'\Omega_i G$ bekannt sein.

---

1) Sind diese Verhältnisse jedoch unbekannt, so liegt es auf der Hand, auf Schätzungen der Varianzkomponenten zurückzugreifen. Die Eigenschaften der darauf aufbauenden zwei-, möglicherweise sogar mehrstufigen Schätzungen der E-Struktur für die stets im Rahmen dieser Arbeit betrachteten kleinen Stichproben sind aber unbekannt.

2) P_G ist die Projektionsmatrix $G(G'G)^+G'$.

Es kann zwar, sollten diese Informationen nicht vorhanden sein, stets mit der einfachen KQ-Schätzung eine erwartungstreue Schätzung durchgeführt werden, doch schon bei der Bestimmung des Schätzfehlers kommt man ohne diese Informationen nicht aus. Man kann zudem, etwa von der einfachen KQ-Schätzung ausgehend, nicht einmal hoffen, sich durch eine mehrstufige Schätzung der verallgemeinerten KQ-Schätzung zu nähern, ist es doch unmöglich, die Varianzen der aggregierten Störvariablen, bzw. deren Autokorrelationsstruktur beispielsweise im Rahmen der aggregierten Modelle $(\bar{Z}.3)$, $(\bar{Q}.1)$, $(\bar{Q}.2)$, $(\bar{Q}.3)$, $(\bar{Q}.4)$ oder $(\bar{K})$ aufgrund der Daten $(\bar{y},\bar{X})$ zu schätzen. Und trotzdem gibt es m.E. zumindest aus Gründen der Praktikabilität keine Alternative zur einfachen KQ-Schätzung, wenn man nicht in der Lage ist, auf die notwendigen Informationen zurückgreifen zu können oder die fehlenden Informationen durch Hypothesen zu ersetzen.

3.1.3 Ein spezielles Schätzproblem.

Sei mit dem ursprünglichen Modell (Q) und dem aggregierten Modell $(\bar{Q}.3)$ noch einmal eines der obigen Beispiele aufgenommen. Sind etwa die Randverteilungen, jedoch nicht die gemeinsame Verteilung der Merkmale $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ bekannt, so kann die E-Struktur sowohl durch

$$\check{\beta}_{(\mathfrak{A})}=\{\sum_{k=1}^{S}\{\sum_{i\in\mathfrak{J}(a_k)}x_i\sum_{i\in\mathfrak{J}(a_k)}x_i'\}\cdot h\overline{(a_k)}\}^{-1}\{\sum_{k=1}^{S}\sum_{i\in\mathfrak{J}(a_k)}x_i\sum_{i\in\mathfrak{J}(a_k)}y_i\}\cdot h\overline{(a_k)}\}$$

als auch durch

$$\check{\beta}_{(\mathfrak{B})}=\{\sum_{l=1}^{R}\{\sum_{i\in\mathfrak{J}(b_l)}x_i\sum_{i\in\mathfrak{J}(b_l)}x_i'\,h\overline{(b_l)}\}^{-1}\{\sum_{l=1}^{R}\{\sum_{i\in\mathfrak{J}(b_l)}x_i\sum_{i\in\mathfrak{J}(b_l)}y_i\}h\overline{(b_l)}\}$$

erwartungstreu geschätzt werden. Unter Rückgriff auf die oben definierten Matrizen $G_{\mathfrak{A}}$ und $G_{\mathfrak{B}}$ lassen sich diese Schätzfunktionen auch durch

$$\check{\beta}_{(\mathfrak{A})}=\{X'G_{\mathfrak{A}}(G_{\mathfrak{A}}'G_{\mathfrak{A}})^{-1}G_{\mathfrak{A}}'X\}^{-1}X'G_{\mathfrak{A}}(G_{\mathfrak{A}}'G_{\mathfrak{A}})^{-1}G_{\mathfrak{A}}'y$$

und

$$\check{\beta}_{(\mathfrak{B})}=\{X'G_{\mathfrak{B}}(G_{\mathfrak{B}}'G_{\mathfrak{B}})^{-1}G_{\mathfrak{B}}'X\}^{-1}X'G_{\mathfrak{B}}(G_{\mathfrak{B}}'G_{\mathfrak{B}})^{-1}G_{\mathfrak{B}}'y$$

beschreiben, wobei die Variablen und Parameter des Modells (Q) zu entsprechenden Vektoren und Matrizen zusammengefaßt worden sind und als Indexmenge die Menge $\mathfrak{J}=\{1,2,\ldots,T\}$ zugrunde gelegt worden ist.

Nun kann, indem auf alle zur Verfügung stehenden Daten zurückgegriffen wird, durch

$$\check{\beta}_{(\mathfrak{A},\mathfrak{L})}=\{X'(G_{\mathfrak{A}},G_{\mathfrak{L}})\begin{pmatrix} G_{\mathfrak{A}}'G_{\mathfrak{A}} & G_{\mathfrak{A}}'G_{\mathfrak{L}} \\ G_{\mathfrak{L}}'G_{\mathfrak{A}} & G_{\mathfrak{L}}'G_{\mathfrak{L}} \end{pmatrix}^{+}\begin{pmatrix} G_{\mathfrak{A}}' \\ G_{\mathfrak{L}}' \end{pmatrix}X\}^{-1}\{X'(G_{\mathfrak{A}},G_{\mathfrak{L}})\begin{pmatrix} G_{\mathfrak{A}}'G_{\mathfrak{A}} & G_{\mathfrak{A}}'G_{\mathfrak{L}} \\ G_{\mathfrak{L}}'G_{\mathfrak{A}} & G_{\mathfrak{L}}'G_{\mathfrak{L}} \end{pmatrix}^{+}\begin{pmatrix} G_{\mathfrak{A}}' \\ G_{\mathfrak{L}}' \end{pmatrix}y\}$$

eine Strukturschätzung vorgenommen werden, die durch einen kleineren Schätzfehler gekennzeichnet ist. Mit

$$P_{\mathfrak{A}}+(I-P_{\mathfrak{A}})G_{\mathfrak{L}}(G_{\mathfrak{L}}'(I-P_{\mathfrak{A}})G_{\mathfrak{L}})^{+}G_{\mathfrak{L}}'(I-P_{\mathfrak{A}})=(G_{\mathfrak{A}},G_{\mathfrak{L}})\begin{pmatrix} G_{\mathfrak{A}}'G_{\mathfrak{A}} & G_{\mathfrak{A}}'G_{\mathfrak{L}} \\ G_{\mathfrak{L}}'G_{\mathfrak{A}} & G_{\mathfrak{L}}'G_{\mathfrak{L}} \end{pmatrix}^{+}\begin{pmatrix} G_{\mathfrak{A}}' \\ G_{\mathfrak{L}}' \end{pmatrix};$$

wobei $P_{\mathfrak{A}}=G_{\mathfrak{A}}(G_{\mathfrak{A}}'G_{\mathfrak{A}})^{-1}\,G'_{\mathfrak{A}}$ sei, ergibt sich

$$\check{\beta}_{(\mathfrak{A},\mathfrak{L})}=\{X'\{P_{\mathfrak{A}}+(I-P_{\mathfrak{A}})G_{\mathfrak{L}}\,(G_{\mathfrak{L}}'(I-P_{\mathfrak{A}})G_{\mathfrak{L}})^{+}G_{\mathfrak{L}}'(I-P_{\mathfrak{A}})\}X\}^{-1}\ *$$
$$X'\{P_{\mathfrak{A}}+(I-P_{\mathfrak{A}})G_{\mathfrak{L}}(G_{\mathfrak{L}}'(I-P_{\mathfrak{A}})G_{\mathfrak{L}})^{+}G_{\mathfrak{L}}'(I-P_{\mathfrak{A}})\}y$$

so daß man schließlich nach Anwendung der Regeln zur Inversion von Summen [1]

$$\check{\beta}_{(\mathfrak{A},\mathfrak{L})}=\check{\beta}_{(\mathfrak{A})}+(X'P_{\mathfrak{A}}X)^{-1}X'(I-P_{\mathfrak{A}})G_{\mathfrak{L}}\ *$$
$$\{I+\{G_{\mathfrak{L}}'(I-P_{\mathfrak{A}})G_{\mathfrak{L}}\}^{+}G_{\mathfrak{L}}'(I-P_{\mathfrak{A}})X(X'P_{\mathfrak{A}}X)^{-1}X'(I-P_{\mathfrak{A}})G_{\mathfrak{L}}\}^{-1}\{G_{\mathfrak{L}}'(I-P_{\mathfrak{A}})G_{\mathfrak{L}}\}^{+}G_{\mathfrak{L}}'(I-P_{\mathfrak{A}})\ *$$
$$\{y-X\check{\beta}_{(\mathfrak{A})}\}$$

erhält. Einer solchen Verbesserung der Strukturschätzung steht jedoch die aufgrund der Voraussetzung vorhandene Unkenntnis der gemeinsamen Verteilung der Merkmale $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{L}$, also der Matrix $G_{\mathfrak{A}}'G_{\mathfrak{L}}$ entgegen.

Es liegt nun auf der Hand, die vorhandene Informationslücke durch geeignete Hypothesen aufzufüllen. Insbesondere bietet es sich an, nach Schätzungen zu suchen, die immer dann optimal sind, wenn die Merkmale $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{L}$ zumindest in Bezug auf die dem Modell zugrunde liegende Menge ökonomischer Einheiten unabhängig oder vollkommen abhängig sind, um diese Schätzung auch dann durchzuführen, wenn die Unabhängigkeit bzw. Abhängigkeit a priori nur vermutet werden kann.

Sind die Merkmale $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{L}$ also unabhängig, so wird man davon ausgehen können, daß

$$h(a_k,b_l)=\frac{1}{T}\,h(a_k)\cdot h(b_l)\quad\forall\ k,l$$

---

1) C.R. Rao (1973) Seite 33, Problem 2.9

$(A+BC')^{-1} = A^{-1} - A^{-1}B\,(I+C'A^{-1}B)^{-1}\,C'A^{-1}$

oder durch die Matrizen $G_{\mathcal{A}}$ und $G_{\mathcal{L}}$ ausgedrückt,

$$G_{\mathcal{A}}'G_{\mathcal{L}} = \frac{1}{T}\, G_{\mathcal{A}}'\, \iota_T\, \iota_T'\, G_{\mathcal{L}}$$

gilt. Um nun diesen Zusammenhang direkt berücksichtigen zu können, sei statt des Modells (Q) das um die Scheinvariable bereinigte Modell (Q^*) zugrunde gelegt. Mit $X=(\iota_T,Z)$ und $\beta'=(\alpha,\gamma')$ sowie $y^*=(I-\frac{1}{T}\,\iota_T\,\iota_T')y$, $Z^*=(I-\frac{1}{T}\,\iota_T\,\iota_T')Z$ und $u^*=(I-\frac{1}{T}\,\iota_T\,\iota_T')u$ ist dieses Modell durch

$$(Q^*)\qquad \begin{aligned} &y^*=Z^*\,\gamma+u^* \\ &E(u^*)=o;\ E(u^*u^{*\prime})=\sigma^2(I-\tfrac{1}{T}\,\iota_T\iota_T');\ \gamma\in\mathbb{R}^{n-1};\ o<\sigma^2<\infty \end{aligned}$$

zu spezifizieren. Entsprechend ergibt sich das aggregierte Modell

$$(Q^*3)\qquad \begin{aligned} &G_{\mathcal{A}}'y^*=G_{\mathcal{A}}'Z^*\gamma + G_{\mathcal{A}}'\,u^* \\ &G_{\mathcal{L}}'y^*=G_{\mathcal{L}}'Z^*\gamma + G_{\mathcal{L}}'\,u^* \\ &E(G_{\mathcal{A}}'u^*)=E(G_{\mathcal{L}}'u^*)=o;\ E(G_{\mathcal{A}}'u^*u^{*\prime}G_{\mathcal{A}})=\sigma^2G_{\mathcal{A}}'(I-\tfrac{1}{T}\,\iota_T\iota_T')G_{\mathcal{A}} \\ &E(G_{\mathcal{L}}'u^*u^{*\prime}G_{\mathcal{L}})=\sigma^2\,G_{\mathcal{L}}'(I-\tfrac{1}{T}\,\iota_T\iota_T')G_{\mathcal{L}};\ E(G_{\mathcal{L}}'u^*u^{*\prime}G_{\mathcal{A}})=o; \\ &\gamma\in\mathbb{R}^{n-1};\ o<\sigma^2<\infty, \end{aligned}$$

wobei die Unabhängigkeit der Merkmale $\mathcal{A}$ und $\mathcal{L}$ bereits berücksichtigt wurde, da dann

$$G_{\mathcal{L}}'(I-\tfrac{1}{T}\,\iota_T\iota_T')G_{\mathcal{A}} = G_{\mathcal{L}}'G_{\mathcal{A}}-\tfrac{1}{T}\,G_{\mathcal{L}}'\iota_T\iota_T'G_{\mathcal{A}}=o$$

gelten muß. Die Struktur dieses Modells wird offensichtlich durch

$$\hat{\gamma}_{(\mathcal{A},\mathcal{L})}=\{Z^{*\prime}G_{\mathcal{A}}\{G_{\mathcal{A}}'(I-\tfrac{1}{T}\,\iota_T\iota_T')G_{\mathcal{A}}\}^{+}G_{\mathcal{A}}'Z^*+Z^{*\prime}G_{\mathcal{L}}\{G_{\mathcal{L}}'(I-\tfrac{1}{T}\iota_T\iota_T')G_{\mathcal{L}}\}^{+}G_{\mathcal{L}}'Z^*\}^{-1}*$$
$$\{Z^{*\prime}G_{\mathcal{A}}\{G_{\mathcal{A}}'(I-\tfrac{1}{T}\,\iota_T\iota_T')G_{\mathcal{A}}\}^{+}G_{\mathcal{A}}'y^*+Z^{*\prime}G_{\mathcal{L}}\{G_{\mathcal{L}}'(I-\tfrac{1}{T}\,\iota_T\iota_T')G_{\mathcal{L}}\}^{+}G_{\mathcal{L}}'y^*\}$$

optimal geschätzt. Vergegenwärtigt man sich, daß wegen

$$(I-\tfrac{1}{T}\,\iota_T\iota_T')G_{\mathcal{A}}\iota_S = (I-\tfrac{1}{T}\,\iota_T\iota_T')\iota_T=o$$

der Rang der Matrix $(I-\frac{1}{T}\iota_T\iota_T')G_{\mathcal{A}}$ genau S-1 ist, denn $(I-\frac{1}{T}\iota_T\iota_T')$ ist eine Projektionsmatrix von Rang T-1 und $G_{\mathcal{A}}$ eine Matrix von Rang S, so ist mit

$$(I-\tfrac{1}{T}\iota_T\iota_T')G_{\mathcal{A}}(G_{\mathcal{A}}'(I-\tfrac{1}{T}\iota_T\iota_T')G_{\mathcal{A}})^{+}G_{\mathcal{A}}'(I-\tfrac{1}{T}\iota_T\iota_T')\{G_{\mathcal{A}}(G_{\mathcal{A}}'G_{\mathcal{A}})^{-1}G_{\mathcal{A}}'-\tfrac{1}{T}\iota_T\iota_T'\}=$$
$$(I-\tfrac{1}{T}\iota_T\iota_T')G_{\mathcal{A}}(G_{\mathcal{A}}'G_{\mathcal{A}})^{-1}G_{\mathcal{A}}'=G_{\mathcal{A}}(G_{\mathcal{A}}'G_{\mathcal{A}})^{-1}G_{\mathcal{A}}'-\tfrac{1}{T}\iota_T\iota_T'G_{\mathcal{A}}(G_{\mathcal{A}}'G_{\mathcal{A}})^{-1}G_{\mathcal{A}}' =$$
$$P_{\mathcal{A}}-\tfrac{1}{T}\iota_T\iota_S'G_{\mathcal{A}}' = P_{\mathcal{A}}-\tfrac{1}{T}\,\iota_T\iota_T'$$

und der Tatsache, daß der Rang der idempotenten Matrix $P_{\alpha}-\frac{1}{T}\,\iota_T\iota_T'$ ebenfalls S-1 ist, gezeigt, daß

$$(I-\tfrac{1}{T}\,\iota_T\iota_T')G_{\alpha}\{G_{\alpha}'(I-\tfrac{1}{T}\,\iota_T\iota_T')G_{\alpha}\}^{+}G_{\alpha}'(I-\tfrac{1}{T}\,\iota_T\iota_T')=P_{\alpha}-\tfrac{1}{T}\,\iota_T\iota_T'$$

gilt. Berücksichtigt man zudem noch, daß $Z^{*}=(I-\frac{1}{T}\,\iota_T\iota_T')Z^{*}$ gilt, so kann die verallgemeinerte KQ-Schätzung vereinfacht durch

$$\check{\gamma}_{(\alpha,\beta)}=\{Z^{*}{}'(P_{\alpha}+P_{\beta})Z^{*}\}^{-1}\;Z^{*}{}'(P_{\alpha}+P_{\beta})y^{*}$$

angegeben werden. Als Schätzfehler ergibt sich dann

$$V(\check{\gamma}_{(\alpha,\beta)})=\sigma^{2}\{Z^{*}{}'(P_{\alpha}+P_{\beta})Z^{*}\}^{-1}$$

Führt man die lt. Voraussetzung beobachteten Variablen $y_{\alpha}{}^{*}=G_{\alpha}{}'y^{*}$, $y_{\beta}{}^{*}=G_{\beta}{}'y^{*}$, $Z_{\alpha}^{*}=G_{\alpha}{}'Z^{*}$ und $Z_{\beta}{}^{*}=G_{\beta}{}'Z^{*}$ explizit ein, so ergibt sich

$$\check{\gamma}_{(\alpha,\beta)}=\{Z_{\alpha}^{*}{}'(G_{\alpha}{}'G_{\alpha})^{-1}Z_{\alpha}^{*}+Z_{\beta}^{*}(G_{\beta}{}'G_{\beta})^{-1}Z_{\beta}^{*}\}^{-1}\{Z_{\alpha}^{*}{}'(G_{\alpha}{}'G_{\alpha})^{-1}y_{\alpha}^{*}+Z_{\beta}^{*\prime}(G_{\beta}{}'G_{\beta})^{-1}y_{\beta}^{*}\}$$

Der Schätzfehler ist entsprechend zu berechnen. Das Absolutglied schließlich ist, da wegen $G_{\alpha}\iota_S=G_{\beta}\iota_R=\iota_T$ das Gesamtmittel von der jeweiligen Gruppierung unabhängig ist, durch

$$\check{\alpha}_{(\alpha,\beta)}=\tfrac{1}{T}\,\iota_T'y-\tfrac{1}{T}\,\iota_T'Z\,\check{\gamma}_{\alpha,\beta}$$

mit einem Schätzfehler

$$V(\check{\alpha}_{(\alpha,\beta)})=\sigma^{2}\{\tfrac{1}{T}+\tfrac{1}{T}2\;\iota_T'Z\{Z_{\alpha}^{*}{}'(G_{\alpha}{}'G_{\alpha})^{-1}Z_{\alpha}^{*}+Z_{\beta}^{*\prime}(G_{\beta}{}'G_{\beta})^{-1}Z_{\beta}^{*}\}^{-1}Z'\iota_T\}$$

zu bestimmen.

Die eigentlichen Regressionskoeffizienten γ, jeweils nur eine Gruppierung zugrunde gelegt, waren schon durch

$$\check{\gamma}_{(\alpha)}=\{Z_{\alpha}^{*}{}'(G_{\alpha}{}'G_{\alpha})^{-1}Z_{\alpha}^{*}\}^{-1}Z_{\alpha}^{*}{}'(G_{\alpha}{}'G_{\alpha})^{-1}\;y_{\alpha}^{*}$$

und

$$\check{\gamma}_{(\beta)}=\{Z_{\beta}^{*\prime}(G_{\beta}{}'G_{\beta})^{-1}\;Z_{\beta}^{*}\}^{-1}\;Z_{\beta}^{*}{}'(G_{\beta}{}'G_{\beta})^{-1}\;y_{\beta}^{*}$$

erwartungstreu zu schätzen. Es ist nun einzusehen, daß

$$\check{\gamma}_{(\alpha,\beta)}=\{Z_{\alpha}^{*}{}'(G_{\alpha}{}'G_{\alpha})^{-1}Z_{\alpha}^{*}+Z_{\beta}^{*\prime}(G_{\beta}{}'G_{\beta})^{-1}Z_{\beta}^{*}\}^{-1}\{Z_{\alpha}^{*}{}'(G_{\alpha}{}'G_{\alpha})^{-1}Z_{\alpha}^{*}\check{\gamma}_{(\alpha)}+Z_{\beta}^{*}{}'(G_{\beta}{}'G_{\beta})^{-1}Z_{\beta}^{*}\check{\gamma}_{(\beta)}\}$$

gilt, daß also die Schätzungen $\check{\gamma}_{(\alpha)}$ und $\check{\gamma}_{(\beta)}$ mit den "Gewichten" $Z_{\alpha}^{*}{}'(G_{\alpha}{}'G_{\alpha})^{-1}Z_{\alpha}^{*}$ und $Z_{\beta}^{*}{}'(G_{\beta}{}'G_{\beta})^{-1}\;Z_{\beta}^{*}$ in die Schätzung $\check{\gamma}_{(\alpha,\beta)}$ eingehen.

Es zeigt sich nun, daß mit

$$(I-\frac{1}{T}\,\iota_T\iota_T')z_q = [z_{iq}-\bar{z}_q] \qquad i=1,2,\ldots,T$$

und

$$G_{\mathcal{O}\!\!\!/}'(I-\frac{1}{T}\,\iota_T\iota_T')z_q = [\sum_{i\in\mathfrak{I}(a_k)}(z_{iq}-\bar{z}_q)] \qquad k=1,2,\ldots,S$$

offensichtlich

$$z_p'(I-\frac{1}{T}\,\iota_T\iota_T')G_{\mathcal{O}\!\!\!/}(G_{\mathcal{O}\!\!\!/}'G_{\mathcal{O}\!\!\!/})^{-1}G_{\mathcal{O}\!\!\!/}'(I-\frac{1}{T}\,\iota_T\iota_T')z_q =$$

$$\sum_{k=1}^{S} h(a_k)\{\sum_{i\in\mathfrak{I}(a_k)}(z_{ip}-\bar{z}_p)\}\{\sum_{i\in\mathfrak{I}(a_k)}(z_{iq}-\bar{z}_q)\}$$

gilt. Berücksichtigt man nun

$$\bar{z}_{kp} = h(a_k)\sum_{i\in\mathfrak{I}(a_k)} z_{ip} \qquad k=1,2,\ldots,S$$

so wird daraus

$$\sum_{k=1}^{S} h(a_k)\{h(a_k)(\bar{z}_{kp}-\bar{z}_p)\}\{h(a_k)(\bar{z}_{kq}-\bar{z}_q)\}=$$

$$\sum_{k=1}^{S} h(a_k)(\bar{z}_{kp}-\bar{z}_p)(\bar{z}_{kq}-\bar{z}_q)$$

Die Matrizen $Z^{*}_{\mathcal{O}\!\!\!/}'(G_{\mathcal{O}\!\!\!/}'G_{\mathcal{O}\!\!\!/})^{-1}Z^{*}_{\mathcal{O}\!\!\!/}$ und $Z^{*}_{\mathcal{L}\!\!\!/}'(G_{\mathcal{L}\!\!\!/}'G_{\mathcal{L}\!\!\!/})^{-1}Z^{*}_{\mathcal{L}\!\!\!/}$ enthalten also den Teil der Varianzen und Kovarianzen der eigentlich erklärenden Variablen, der zwischen den Gruppen besteht. Somit wird also diejenige Schätzung mit einem relativ größeren "Gewicht" in die Schätzung $\gamma_{(\mathcal{O}\!\!\!/,\mathcal{L}\!\!\!/)}$ eingehen, die auf einer Gruppierung basiert, bei der von den Gesamtvarianzen und -kovarianzen $Z^{*\prime}Z^{*}$ relativ viel erhalten bleibt.

Sei nun nach einer Schätzung bei vollkommener Abhängigkeit gesucht. Es sei dabei, um nur eine der beiden Möglichkeiten darzustellen, davon ausgegangen, daß das Merkmal $\mathcal{L}\!\!\!/$ von dem Merkmal $\mathcal{O}\!\!\!/$ abhängig ist,daß es zu jeder Merkmalsausprägung b_l mindestens eine Merkmalsausprägung a_k gibt, so daß

$$\mathfrak{I}(a_k)\subset\mathfrak{I}(b_l) \quad \forall\, l=1,2,\ldots,R$$

gilt, daß also stets von einer bei einer ökonomischen Einheit festgestellten Merkmalsausprägung a_k auf die bei dieser ökonomischen Einheit festzustellende Merkmalsausprägung b_l geschlossen werden kann.

Um zu zeigen, daß unter diesen Voraussetzungen die Schätzung $\check{\beta}_{\mathcal{A}}$ optimal ist, sei

$$\mathfrak{Z}(b_l)=\bigcup_{j=1}^{p(l)} \mathfrak{Z}(a_{l_j}) \quad l=1,2,\ldots,R;\ l_j \in \{1,2,\ldots,S\}$$

unterstellt. Da nun

$$G_{\mathcal{B}}\, e_l = \sum_{j=1}^{p(l)} G_{\mathcal{A}}\, e_{l_j} \quad l=1,2,\ldots,R$$

gilt, wobei die Vektoren e_i an der i-ten Stelle eine Eins, sonst nur Nullen enthalten, ist die Matrix $G_{\mathcal{B}}$ unter Verwendung einer SxR Matrix E, die, wenn $\mathfrak{Z}(a_k)\subset \mathfrak{Z}(b_l)$ gilt, an der (k,l)-ten Stelle eine Eins, sonst aber nur Nullen enthält, durch

$$G_{\mathcal{B}} = G_{\mathcal{A}}\, E$$

aus der Matrix $G_{\mathcal{A}}$ abzuleiten. Es muß also

$$(I-P_{\mathcal{A}})G_{\mathcal{B}} = (I-P_{\mathcal{A}})G_{\mathcal{A}}\, E=0$$

gelten, so daß die Schätzung $\check{\beta}_{\mathcal{A}}$ nicht zu verbessern ist. Die Daten $(G_{\mathcal{B}}'y, G_{\mathcal{B}}'X)$ sind, da durch eine Linearkombination aus den Daten $(G_{\mathcal{A}}'y, G_{\mathcal{A}}'X)$ zu gewinnen, wie nicht anders zu erwarten, redundant.

Ist nun aber zu vermuten, daß die Merkmale $\mathcal{A}$ und $\mathcal{B}$ eher abhängig denn unabhängig, nicht jedoch vollkommen abhängig sind, kann zwar auch auf die unter den Annahmen der Unabhängigkeit und Abhängigkeit entwickelten Schätzungen, ebenso aber auch auf die einfache KQ-Schätzung zurückgegriffen werden. Wie gut oder schlecht diese Schätzungen sind, ob eine Schätzung allen anderen Schätzungen vorzuziehen ist, kann jedoch nicht entschieden werden.

Obwohl dies auch für eine von Haitovsky[1] vorgeschlagene Schätzung, die ebenfalls ohne die Kenntnis der gemeinsamen Häufigkeitsverteilung der Merkmale $\mathcal{A}$ und $\mathcal{B}$ auskommt, gilt, erscheint es trotzdem angebracht, diese Schätzung ob ihrer Originalität darzustellen. Seien die Variablen Z durch $Z=(Z_1,Z_2)$ zu unterteilen, so daß

1) vgl. Y. Haitovsky (1973), Kapitel 4

$$Z_1^{*\prime}Z_1^* = Z_1^{*\prime}P_{\mathcal{A}}Z_1^* \; ; \; Z_2^{*\prime}Z_2^* = Z_2^{*\prime}P_{\mathcal{B}}Z_2^*$$

gilt, so schlägt Haitovsky vor, die E-Struktur des Modells (Q^*) durch

$$\hat{\hat{\gamma}} = \begin{pmatrix} \hat{\hat{\gamma}}_1 \\ \hat{\hat{\gamma}}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Z_1^{*\prime}P_{\mathcal{A}}Z_1^* & Z_1^{*\prime}P_{\mathcal{A}}Z_2^* \\ Z_2^{*\prime}P_{\mathcal{B}}Z_1^* & Z_2^{*\prime}P_{\mathcal{B}}Z_2^* \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} Z_1^{*\prime}P_{\mathcal{A}}\, y^* \\ Z_2^{*\prime}P_{\mathcal{B}}\, y^* \end{pmatrix}$$

zu schätzen. Um den Schätzfehler

$$V(\hat{\gamma}) = \sigma^2 \begin{pmatrix} Z_1^{*\prime}P_{\mathcal{A}}Z_1^* & Z_1^{*\prime}P_{\mathcal{A}}Z_2^* \\ Z_2^{*\prime}P_{\mathcal{B}}Z_1^* & Z_2^{*\prime}P_{\mathcal{B}}Z_2^* \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} Z_1^{*\prime}P_{\mathcal{A}}Z_1^*, Z_1^{*\prime}P_{\mathcal{A}}P_{\mathcal{B}}Z_2^* \\ Z_2^{*\prime}P_{\mathcal{B}}P_{\mathcal{A}}Z_1^*, Z_2^{*\prime}P_{\mathcal{B}}Z_2^* \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Z_1^{*\prime}P_{\mathcal{A}}Z_1^* & Z_1^{*\prime}P_{\mathcal{B}}Z_2^* \\ Z_2^{*\prime}P_{\mathcal{A}}Z_1^* & Z_2^{*\prime}P_{\mathcal{B}}Z_2^* \end{pmatrix}^{-1}$$

bestimmen zu können, bedarf es jedoch auch hier wegen

$$Z_1^{*\prime}P_{\mathcal{A}}P_{\mathcal{B}}Z_2^* = Z_{1\mathcal{A}}^{*\prime}(G_{\mathcal{A}}'G_{\mathcal{A}})^{-1}\, G_{\mathcal{A}}'G_{\mathcal{B}}(G_{\mathcal{B}}'G_{\mathcal{B}})^{-1}\, Z_{2\mathcal{B}}^*$$

der Kenntnis der gemeinsamen Verteilung der Merkmale $\mathcal{A}$ und $\mathcal{B}$.[1]

Motiviert wird dieser Schätzer von Haitovsky wie folgt. Die bei Gültigkeit des Modells (Q) offensichtlich fehlspezifizierten Modelle

$$y^* = Z_1^*\gamma_1 + u_1^*$$

$$E(u_1^*)=0;\; E(u_1^*u_1^{*\prime})=\sigma^2(I-\tfrac{1}{T}\,\iota_T\iota_T');\; \gamma_1 \in \mathbb{R}^p;\; 0<\sigma^2<\infty$$

und

$$y^* = Z_2^*\,\gamma_2 + u_2^*$$

$$E(u_2^*)=0;\; E(u_2^*u_2^{*\prime})=\sigma^2(I-\tfrac{1}{T}\,\iota_T\iota_T');\; \gamma_2 \in \mathbb{R}^q;\; 0<\sigma^2<\infty$$

wurden zugrunde gelegt, um γ_1 aufgrund der nach dem Merkmal gruppierten Daten durch

$$\tilde{\gamma}_1 = \{Z_{1\mathcal{A}}^*(G_{\mathcal{A}}'G_{\mathcal{A}})^{-1}Z_{1\mathcal{A}}^*\}^{-1}\, Z_{1\mathcal{A}}^*(G_{\mathcal{A}}'G_{\mathcal{A}})^{-1}\, y_{\mathcal{A}}^*$$

und γ_2 entsprechend durch

---

1) Irrtümlicherweise berücksichtigt Haitovsky statt der Matrix $Z_1^{*\prime}P_{\mathcal{A}}P_{\mathcal{B}}Z_2^*$ eine Matrix $Z_1^{*\prime}G_{\mathcal{A}}(G_{\mathcal{A}}'G_{\mathcal{B}})^{-1}G_{\mathcal{A}}'Z_2^*$, wobei übrigens $G_{\mathcal{A}}'G_{\mathcal{B}}$ mit $R \neq S$ auf jeden Fall nicht zu invertieren ist.

$$\tilde{\gamma}_2 = \{Z^*_{2\ell}(G_\ell' G_\ell)^{-1} Z^*_{2\ell}\}^{-1} Z^*_{2\ell}(G_\ell' G_\ell)^{-1} y^*_\ell$$

zu schätzen. Auf diesen verzerrten Schätzungen aufbauend werden nun durch

$$\tilde{\gamma}_1 = \hat{\gamma}_1 + \{Z^*_{1\alpha}'(G_\alpha' G_\alpha)^{-1} Z^*_{1\alpha}\}^{-1} Z^*_{1\alpha}'(G_\alpha' G_\alpha)^{-1} Z^*_{2\alpha}\hat{\gamma}_2$$

$$\tilde{\gamma}_2 = \{Z^*_{2\ell}'(G_\ell' G_\ell)^{-1} Z^*_{2\ell}\}^{-1} Z^*_{2\ell}'(G_\ell' G_\ell)^{-1} Z^*_{1\ell}\hat{\gamma}_1 + \hat{\gamma}_2$$

jene oben aufgeführten erwartungstreuen Schätzungen bestimmt. Indem nun die Schätzungen $\tilde{\gamma}_1$ und $\tilde{\gamma}_2$ im Vergleich zu den im Rahmen der fehlspezifizierten Modelle besten Schätzungen

$$\tilde{\gamma}_1 = \{Z_1^{*\prime} Z_1^*\}^{-1} Z_1^{*\prime} y^*$$

und

$$\tilde{\gamma}_2 = \{Z_2^{*\prime} Z_2^*\}^{-1} Z_2^{*\prime} y^*$$

aufgrund der der Unterteilung der erklärenden Variablen zugrunde liegenden Voraussetzungen nur wenig schlechter sind, behauptet Haitovsky, daß damit die um die Verzerrung korrigierten Schätzungen ebenfalls recht gut sind. Diese Behauptung läßt sich m.E. jedoch nicht aufrecht erhalten, da hier, wie übrigens auch an anderer Stelle[1)], das Problem der durch Gruppierungen hervorgerufenen Multikollinearität ungerechtfertigterweise von Haitovsky vernachlässigt wird. Oberhaupt, und das sei abschließend bemerkt, erscheint es hier sinnvoller, fehlende Informationen durch plausible Hypothesen zu ersetzen anstatt auf in ihren Implikationen unklare "Techniken" zurückzugreifen.

---

1) vgl. Y. Haitovsky (1973), Seite 11. Dort wird recht sorglos eine Aussage von Cramer (1964) bzw. (1968) verallgemeinert, obwohl dieser selbst ((1968), Seite 146) auf das Problem der Multikollinearität hinweist.

3.2. Schätzung der V-Struktur

3.2.1. Beispiele

Auch dieses Schätzproblem sei zuerst an Beispielen erläutert. Es wird dabei jedoch nicht nur auf einige der oben angeführten Beispiele zurückgegriffen, vielmehr werden noch zusätzlich Beispiele aufgenommen, an denen das Problem der Schätzung von Varianzkomponenten aufgrund aggregierter Modelle beleuchtet werden kann.

Die Schätzung der V-Struktur des Modells (Z) im Rahmen des aggregierten Modells ($\bar{Z}.1$) kann offensichtlich unmittelbar durch die Summe der quadrierten KQ-Residuen, also durch

$$\hat{\sigma}^2_{(1)} = \frac{1}{T_1+4T_2-n} \{ \sum_{t=1}^{T_1} \hat{u}_{4t}^2 + \sum_{t=T_1+1}^{T_1+T_2} \sum_{i=1}^{4} \hat{u}_{it}^2 \}$$

vorgenommen werden, denn die KQ-Quartalsresiduen

$$\hat{u}_{it} = y_{it} - x_{it}' \hat{\beta}_{(1)}$$

sind nur für i=4 zu berechnen, wenn $t \leq T_1$ ist.

Wenn nun das aggregierte Modell ($\bar{Z}.2$) zugrunde zu legen ist, muß beachtet werden, daß KQ-Quartalsresiduen zwar für $t>T_1$ zu bestimmen sind, daß aber für $t \leq T_1$ nur KQ-Jahresresiduen

$$\sum_{i=1}^{4} \hat{u}_{it} = \sum_{i=1}^{4} y_{it} - \sum_{i=1}^{4} x_{it}' \hat{\beta}_{(2)}$$

zu bestimmen sind. Bei einer Schätzung der Varianz durch

$$\hat{\sigma}^2_{(2)} = \frac{1}{T_1+4T_2-n} \{ \sum_{t=1}^{T_1} \{ \sum_{i=1}^{4} \hat{u}_{it} \}^2 \cdot \frac{1}{4} + \sum_{t=T_1+1}^{T_1+T_2} \sum_{i=1}^{4} \hat{u}_{it}^2 \}$$

wird aber der durch die Berücksichtigung von Jahresresiduen hervorgerufenen Heteroskedastizität Rechnung getragen. Entsprechend ist schließlich aufgrund des Modells ($\bar{Z}.3$) die Varianz durch

$$\hat{\sigma}^2_{(3)} = \frac{1}{T_1+4T_2-n} \{ \sum_{t=1}^{T_1} \{ \sum_{i=1}^{4} \kappa_{it} \hat{u}_{it} \}^2 \{ \sum_{i=1}^{4} \kappa_{it}^2 \}^{-1} + \sum_{t=T_1+1}^{T_1+T_2} \sum_{i=1}^{4} \hat{u}_{it}^2 \}$$

zu schätzen.

Eine gewogene Summe von quadrierten KQ-Residuen kann teilweise auch zur Schätzung der V-Struktur des Modells (Q) herangezogen werden. Ist diese Schätzung etwa im Rahmen des aggregierten Modells ($\bar{Q}.1$) durchzuführen, so ist dazu

$$\check{\sigma}^2_{(\mathcal{O}\ell)} = \frac{1}{S-n} \{ \sum_{k=1}^{S} \{ \sum_{i \in \mathfrak{J}(a_k)} \check{u}_i \}^2 \cdot \frac{1}{h(a_k)} \}$$

heranzuziehen, wobei

$$\sum_{i \in \mathfrak{J}(a_k)} \check{u}_i = \sum_{i \in \mathfrak{J}(a_k)} y_i - \sum_{i \in \mathfrak{J}(a_k)} x_i' \check{\beta}_{\mathcal{O}\ell}$$

das KQ-Residuum der k-ten Gruppe ist.

Wenn nun das eine Scheinvariable enthaltende Modell ($\bar{Q}.3$) zugrunde zu legen ist, kann σ^2 durch

$$\check{\sigma}^2_{(\mathcal{O}\ell,\mathfrak{L})} = \frac{1}{R+S-1-n} \{ \sum_{k=1}^{S} \{ \sum_{i \in \mathfrak{J}(a_k)} \check{u}_i \}^2 \frac{1}{h(a_k)} + \sum_{l=1}^{R} \{ \sum_{i \in \mathfrak{J}(b_l)} \check{u}_i \}^2 \frac{1}{h(b_l)} \}$$

erwartungstreu geschätzt werden, sofern die Merkmale $\mathcal{O}\ell$ und $\mathfrak{L}$ unabhängig sind. Sei, um dies zu zeigen, wiederum auf die Matrizen $G_{\mathcal{O}\ell}$ und $G_{\mathfrak{L}}$ zurückgegriffen. Mit

$$\begin{aligned}
\check{u}_{\mathcal{O}\ell|\mathcal{O}\ell,\mathfrak{L}} &= G_{\mathcal{O}\ell}' \{ y - {}_1T \check{\alpha}_{(\mathcal{O}\ell,\mathfrak{L})} - Z \check{\gamma}_{(\mathcal{O}\ell,\mathfrak{L})} \} \\
&= G_{\mathcal{O}\ell}' (I - \tfrac{1}{T} {}_1T {}_1T') \{ y - Z \check{\gamma}_{(\mathcal{O}\ell,\mathfrak{L})} \} \\
&= G_{\mathcal{O}\ell}' (I - \tfrac{1}{T} {}_1T {}_1T') u - G_{\mathcal{O}\ell}' (I - \tfrac{1}{T} {}_1T {}_1T') Z \{ Z' (I - \tfrac{1}{T} {}_1T {}_1T') \{ P_{\mathcal{O}\ell} + P_{\mathfrak{L}} \} (I - \tfrac{1}{T} {}_1T {}_1T') Z \}^{-1} * \\
&\qquad Z' (I - \tfrac{1}{T} {}_1T {}_1T') \{ P_{\mathcal{O}\ell} + P_{\mathfrak{L}} \} (I - \tfrac{1}{T} {}_1T {}_1T') u
\end{aligned}$$

und wegen

$$P_{\mathcal{O}\ell} (I - \tfrac{1}{T} {}_1T {}_1T') = (I - \tfrac{1}{T} {}_1T {}_1T') P_{\mathcal{O}\ell} = P_{\mathcal{O}\ell} - \tfrac{1}{T} {}_1T {}_1T'$$

ergibt sich

$$\begin{aligned}
&\check{u}'_{\mathcal{O}|\mathcal{O},\mathfrak{L}} (G_{\mathcal{O}\ell}' G_{\mathcal{O}\ell})^{-1} \check{u}_{\mathcal{O}|\mathcal{O},\mathfrak{L}} + \check{u}'_{\mathfrak{L}|\mathcal{O},\mathfrak{L}} (G_{\mathfrak{L}}' G_{\mathfrak{L}})^{-1} \check{u}_{\mathfrak{L}|\mathcal{O},\mathfrak{L}} \\
&= u' (I - \tfrac{1}{T} {}_1T {}_1T') \{ P_{\mathcal{O}\ell} + P_{\mathfrak{L}} \} (I - \tfrac{1}{T} {}_1T {}_1T') u - u' (I - \tfrac{1}{T} {}_1T {}_1T') \{ P_{\mathcal{O}\ell} + P_{\mathfrak{L}} \} (I - \tfrac{1}{T} {}_1T {}_1T') Z * \\
&\quad \{ Z' (I - \tfrac{1}{T} {}_1T {}_1T') \{ P_{\mathcal{O}\ell} + P_{\mathfrak{L}} \} (I - \tfrac{1}{T} {}_1T {}_1T') Z \}^{-1} Z' (I - \tfrac{1}{T} {}_1T {}_1T') \{ P_{\mathcal{O}\ell} + P_{\mathfrak{L}} \} (I - \tfrac{1}{T} {}_1T {}_1T') u
\end{aligned}$$

Berücksichtigt man nun, daß wegen der Unabhängigkeit der Merkmale $\mathcal{O}\ell$ und $\mathfrak{L}$

$$P_{\mathcal{A}}(I-\tfrac{1}{T}\iota_T\iota_T')P_{\mathcal{L}} = o$$

gelten muß, so ist mit

$$E\{\check{u}_{\mathcal{A}|\mathcal{A},\mathcal{L}}'(G_{\mathcal{A}}'G_{\mathcal{A}})^{-1}\check{u}_{\mathcal{A}|\mathcal{A},\mathcal{L}}+\check{u}_{\mathcal{L}|\mathcal{A},\mathcal{L}}'(G_{\mathcal{L}}'G_{\mathcal{L}})^{-1}\check{u}_{\mathcal{L}|\mathcal{A},\mathcal{L}}\}$$

$$= \sigma^2\{sp\,P_{\mathcal{A}}+sp\,P_{\mathcal{L}}-2\,sp\,\tfrac{1}{T}\iota_T\iota_T'-sp\{Z'(I-\tfrac{1}{T}\iota_T\iota_T')\{P_{\mathcal{A}}+P_{\mathcal{L}}\}(I-\tfrac{1}{T}\iota_T\iota_T')Z\}^{-1} *$$

$$Z'(I-\tfrac{1}{T}\iota_T\iota_T')\{P_{\mathcal{A}}+P_{\mathcal{L}}\}(I-\tfrac{1}{T}\iota_T\iota_T')\{P_{\mathcal{A}}+P_{\mathcal{L}}\}(I-\tfrac{1}{T}\iota_T\iota_T')Z\}$$

$$= \sigma^2\{S + R - 2 - (n-1)\} = \sigma^2\{S + R - 1 - n\}$$

die Erwartungstreue der Schätzung gezeigt. Sind die Merkmale $\mathcal{A}$ und $\mathcal{L}$ jedoch abhängig, ohne vollkommen abhängig zu sein[1], läßt sich die Varianzschätzung nach der verallgemeinerten KQ-Methode

$$\check{\sigma}^2_{(\mathcal{A},\mathcal{L})} = \frac{1}{R+S-1-n}\{\check{u}_{\mathcal{A}|\mathcal{A},\mathcal{L}}'(G_{\mathcal{A}}'G_{\mathcal{A}})^{-1}\check{u}_{\mathcal{A}|\mathcal{A},\mathcal{L}}+\check{u}_{\mathcal{L}|\mathcal{A},\mathcal{L}}'\{G_{\mathcal{L}}'(I-P_{\mathcal{A}})G_{\mathcal{L}}\}^{+}\check{u}_{\mathcal{L}|\mathcal{A},\mathcal{L}}$$

$$-2\,\check{u}_{\mathcal{L}|\mathcal{A},\mathcal{L}}'\{G_{\mathcal{L}}'(I-P_{\mathcal{A}})G_{\mathcal{L}}\}^{+}G_{\mathcal{L}}'G_{\mathcal{A}}(G_{\mathcal{A}}'G_{\mathcal{A}})^{-1}\check{u}_{\mathcal{A}|\mathcal{A},\mathcal{L}}\}$$

jedoch nicht auf eine gewogene Summe von Residuenquadraten zurückführen.

Sei nun das Problem der Schätzung von Varianzkomponenten exemplarisch behandelt. Dazu ist das Modell (Z) zu einem Varianzkomponentenmodell

$$y_{it} = x_{it}'\beta + u_{it};\ u_{it} = v_t + w_{it},\ i=1,2,3,4;\ t=1,2,\ldots,T$$

$$\left.\begin{array}{ll} E(v_t)=o & E(w_{it})=o \\ E(v_t^2)=\sigma_v^2 & E(w_{it}^2)=\sigma_w^2 \end{array}\right\}\ \forall\, i,t;$$

(Z")

$$E(v_t v_{t'})=o\ \ \forall\, t\neq t'\ ;\ E(w_{it}w_{jt'})=o\ \ \forall\,(i,t)\neq(j,t');$$

$$E(v_t\, w_{it}')=o\ \forall\, i,t,t';\ \beta\in\mathbb{R}^n;\ o<\sigma_v^2,\ \sigma_w^2<\infty$$

zu erweitern. Vereinfachend seien die Variablen eines jeden Jahres zu (4x1)Vektoren zusammengefaßt, so daß bei einer expliziten Berücksichtigung der Scheinvariablen dieses Modell auch durch

---

1) Bei vollkommener Abhängigkeit etwa des Merkmals $\mathcal{L}$ vom Merkmal $\mathcal{A}$ ist offensichtlich auf die Schätzung $\check{\sigma}^2_{\mathcal{A}}$ zurückzugreifen.

$$y_t = \iota_4\,\alpha + Z_t'\gamma + u_t \;;\; t=1,2,\ldots,T$$

$$(Z'') \qquad E(u_t)=0 \;\forall\; t;\; E(u_t u_t') = \sigma_w^2(I-\tfrac{1}{4}\iota_4\iota_4') + (\sigma_w^2+4\sigma_v^2)\tfrac{1}{4}\iota_4\iota_4' \;\forall t;$$

$$E(u_t u_{t'}')=0 \quad \forall t\neq t';\; \alpha\in\mathbb{R}^1;\; \gamma\in\mathbb{R}^{n-1};\; 0<\sigma_v^2,\; \sigma_w^2<\infty$$

beschrieben werden kann. Sei nun, um nur eine Aggregationsvorschrift aufzugreifen, davon ausgegangen, daß die Quartalsvariablen erst ab dem (T_1+1)-ten Jahr, vorher jedoch die durch Summation über die Quartale eines jeden Jahres entstehenden Jahresvariablen beobachtet worden sind. Es ist somit das aggregierte Varianzkomponentenmodell

$$\iota_4'y_t = 4\alpha + \iota_4' Z_t'\gamma + \iota_4'u_t;\; t=1,2,\ldots,T_1$$

$$y_t = \iota_4\;\alpha + Z_t'\gamma + u_t; \qquad t=T_1+1,\ldots,T_1+T_2$$

$$(\bar{Z}'') \qquad \begin{aligned} &E(\iota_4'u_t)=0 \;\forall\; t\leq T_1;\; E(\iota_4'u_t u_t'\iota_4)=4(\sigma_w^2+4\sigma_v^2) \;\forall\; t\leq T_1;\\ &E(u_t)=0 \;\forall\; t>T_1;\; E(u_t u_t')=\sigma_w^2(I-\tfrac{1}{4}\iota_4\iota_4')+(\sigma_w^2+4\sigma_v^2)\tfrac{1}{4}\iota_4\iota_4' \;\forall\; t>T_1;\\ &E(\iota_4'u_t u_{t'}'\iota_4)=0 \;\forall\; t\neq t';\; E(u_t u_{t'}')=0 \;\forall\; t\neq t';\; E(\iota_4'u_t u_{t'}')=0 \;\forall\; t\neq t'\\ &\alpha\in\mathbb{R}^1;\; \gamma\in\mathbb{R}^{n-1};\quad 0<\sigma_v^2,\sigma_w^2<\infty \end{aligned}$$

zugrunde zu legen.

Um nun die Varianzkomponenten zu schätzen, wird dieses Modell in zwei Teilmodelle

$$\tfrac{1}{4}\,\iota_4'y_t = \alpha + \tfrac{1}{4}\,\iota_4'Z_t'\,\gamma + \tfrac{1}{4}\,\iota_4'u_t \;;\; t=1,2,\ldots,T_1+T_2$$

$$(\bar{Z}''_{(1)}) \qquad E(\tfrac{1}{4}\iota_4'u_t)=0 \;\forall t;\; E(\tfrac{1}{16}\,\iota_4'u_t u_t'\iota_4)=\tfrac{1}{4}(\sigma_w^2+4\;\sigma_v^2) \;\forall\; t;$$

$$E(\tfrac{1}{16}\,\iota_4'u_t u_{t'}'\iota_4)=0 \;\forall\; t\neq t';\alpha\in\mathbb{R}^1;\gamma\in\mathbb{R}^{n-1};\; 0<\sigma_w^2+4\;\sigma_v^2<\infty$$

und

$$(I-\tfrac{1}{4}\iota_4\iota_4')y_t=(I-\tfrac{1}{4}\iota_4\iota_4')Z_t'\;\gamma + (I-\tfrac{1}{4}\iota_4\iota_4')u_t;\; t=T_1+1,\ldots,T_1+T_2$$

$$(\bar{Z}''_{(2)}) \qquad \begin{aligned} &E(I-\tfrac{1}{4}\iota_4\iota_4')u_t=0 \;\forall t>T_1;E(I-\tfrac{1}{4}\iota_4\iota_4')u_t u_t'(I-\tfrac{1}{4}\iota_4\iota_4')=\sigma_w^2(I-\tfrac{1}{4}\iota_4\iota_4') \;\forall t>T_1;\\ &E(I-\tfrac{1}{4}\iota_4\iota_4')u_t u_{t'}'(I-\tfrac{1}{4}\iota_4\iota_4')=0 \;\forall t>T_1;\alpha\in\mathbb{R}^1;\gamma\in\mathbb{R}^{n-1};\; 0<\sigma_w^2<\infty \end{aligned}$$

zerlegt. Das Modell $(\bar{Z}''_{(1)})$ kann nun herangezogen werden, um

$\sigma_w^2+4\,\sigma_v^2$ zu schätzen, indem man zuerst α und γ durch

$$\hat{\gamma}_{(1)} = \{\sum_{T=1}^{T_1+T_2} \bar{z}_t\bar{z}_t' - (T_1+T_2)\bar{\bar{z}}\bar{\bar{z}}'\}^{-1}\{\sum_{t=1}^{T_1+T_2} \bar{z}_t\bar{y}_t - (T_1+T_2)\bar{\bar{z}}\bar{\bar{y}}\}$$ 1)

$$\hat{\alpha}_{(1)} = \bar{\bar{y}} - \bar{\bar{z}}'\,\hat{\gamma}_{(1)}$$

schätzt und dann die KQ-Residuen

$$\hat{u}_{(1)t} = \bar{y}_t - \hat{\alpha}_{(1)} - \bar{z}_t'\hat{\gamma}_{(1)} = (\bar{y}_t-\bar{\bar{y}}) - (\bar{z}_t'-\bar{\bar{z}})\hat{\gamma}_{(1)}$$

bestimmt, um diese dann bei der erwartungstreuen Schätzung von $\sigma_w^2 + 4\sigma_v^2$ durch

$$\widehat{(\sigma_w^2 + 4\sigma_v^2)} = \frac{1}{T_1+T_2-n}\sum_{t=1}^{T_1+T_2} 4\,\hat{u}_{(1)t}^2$$

zu verwenden. Entsprechend kann nun σ_w^2 im Rahmen des Modells ($\bar{z}''_{(2)}$) geschätzt werden. Durch

$$\hat{\gamma}_{(2)} = \{\sum_{t=T_1+1}^{T_1+T_2} Z_t(I-\tfrac{1}{4}\iota_4\iota_4')Z_t'\}^{-1}\sum_{t=T_1+1}^{T_1+T_2} Z_t(I-\tfrac{1}{4}\iota_4\iota_4')y_t$$

ermittelt man eine weitere Schätzung[2] für γ, die herangezogen wird, um die KQ-Residuen

$$\hat{u}_{(2)t} = (I-\tfrac{1}{4}\iota_4\iota_4')y_t - (I-\tfrac{1}{4}\iota_4\iota_4')Z_t'\,\hat{\gamma}_{(2)}$$

zu ermitteln. Die Varianz σ_w^2 schließlich wird durch

$$\hat{\sigma}_w^2 = \frac{1}{3T_2-(n-1)}\sum_{t=T_1+1}^{T_1+T_2} \hat{u}_{(2)t}'\,\hat{u}_{(2)t}$$

erwartungstreu geschätzt, denn mit

$$\hat{u}_{(2)t} = (I-\tfrac{1}{4}\iota_4\iota_4')u_t - (I-\tfrac{1}{4}\iota_4\iota_4')Z_t'\{\sum_{t=T_1+1}^{T_1+T_2} Z_t(I-\tfrac{1}{4}\iota_4\iota_4')Z_t'\}^{-1} * \sum_{t=T_1+1}^{T_1+T_2} Z_t(I-\tfrac{1}{4}\iota_4\iota_4')u_t$$

ergibt sich

---

1) Der über die Quartale eines jeden Jahres zu ermittelnde Durchschnitt wird durch den (n-1)x1 Vektor $\bar{z}_t$, der über alle Jahre zu ermittelnde Durchschnitt durch den (n-1)x1 Vektor $\bar{\bar{z}}$ beschrieben. Entsprechendes gilt für $\bar{y}_t$ und $\bar{\bar{y}}$.

2) Man beachte, daß sowohl die Schätzung $\hat{\gamma}_{(1)}$ als auch die Schätzung $\hat{\gamma}_{(2)}$ erwartungstreu ist.

$$E\{\sum_{t=T_1+1}^{T_1+T_2} \hat{u}_{(2)t}\,'\,\hat{u}_{(2)t}\}$$

$$= \sigma_w^2\, sp\left\{\sum_{t=T_1+1}^{T_1+T_2}\{(I-\tfrac{1}{4}\iota_4\iota_4')-(I-\tfrac{1}{4}\iota_4\iota_4')Z_t'\{\sum_{t=T_1+1}^{T_1+T_2} Z_t\,(I-\tfrac{1}{4}\iota_4\iota_4')Z_t'\}^{-1}Z_t(I-\tfrac{1}{4}\iota_4\iota_4')\}\right\}$$

$$= \sigma_w^2\,(3T_2 - (n-1))$$

Festzuhalten ist, daß sich das Fehlen der Beobachtungswerte für die Quartalsvariablen der ersten T_1 Jahre nur auf den Schätzfehler von σ_w^2, nicht jedoch auf den Schätzfehler von $\widehat{\sigma_w^2 + 4\sigma_v^2}$ auswirkt.[1)]

Insbesondere bei Modellen zur Kombination von Zeitreihen und Querschnitten bietet sich eine Varianzkomponentenspezifikation an.[2)] Sei etwa die Anzahl der ökonomischen Einheiten in der Zeit konstant gleich P, so ist beispielsweise die Spezifikation des Varianzkomponentenmodells

$$y_t = \iota_p\alpha + Z_t'\gamma + u_t \qquad t = 1,2,\ldots,T$$

$$(K'') \quad E(u_t)=o\ \forall t;\ E(u_t u_t')=(\sigma^2-\rho)\{I-\tfrac{1}{P}\iota_p\iota_p'\}+\{\sigma^2+(P-1)\rho\}\tfrac{1}{P}\iota_p\iota_p'\ \forall t;$$

$$E(u_t u_{t'}')=o\ \forall\, t=t';\ \alpha\in\mathbb{R}^1;\ \gamma\in\mathbb{R}^{n-1};\ o<\sigma^2<\infty;\ \sigma^2>\rho>-\sigma^2/(P-1);$$

sinnvoll. Sind jedoch nicht die Ralisationen der Individualvariablen, sondern nur die Realisationen von entsprechenden Gruppenvariablen beobachtet worden, so ergibt sich, die Gruppierungsmatrix G_{α}[3)] verwendend, das aggregierte Varianzkomponentenmodell

$$G_\alpha' y_t = G_\alpha'\iota_p\alpha + G_\alpha' Z_t'\gamma + G_\alpha' u_t\ ;\quad t = 1,2,\ldots,T$$

$$(\bar{K}'') \quad E(G_\alpha' u_t)=o\ \forall t;\ E(G_\alpha' u_t u_{t'}', G_\alpha)=o\ \forall\, t\neq t';$$

$$E(G_\alpha' u_t u_t' G_\alpha)=(\sigma^2-\rho)G_\alpha'(I-\tfrac{1}{P}\iota_p\iota_p')G_\alpha+(\sigma^2+(P-1)\rho)\tfrac{1}{P}G_\alpha'\iota_p\iota_p' G_\alpha\ \forall t;$$

$$\alpha\in\mathbb{R}^1;\ \gamma\in\mathbb{R}^{n-1};\ o<\sigma^2<\infty;\ \rho<-\sigma^2/(P-1);$$

sofern sich die Gruppenzugehörigkeit der ökonomischen Einheiten in der Zeit nicht ändert.

---

1) Vgl. Abschnitt 3.2.2, insbesondere ($\bar{S}$".3) und ($\bar{S}$".4).

2) Vgl. T.W. Wallace und A. Hussain (1969), insbesondere S.55-58

3) Hier ist G_α' eine entsprechend gebildete (SxP) Matrix.

Auch dieses Modell ist, um $(\sigma^2-\rho)$ und $(\sigma^2+(P-1)\rho)$ und dadurch σ^2 und ρ zu schätzen, in zwei Teilmodelle zu zerlegen. Es sind dies die Modelle[1)]

$$\frac{1}{p}\iota_s'G_{\alpha\iota}'y_t=\frac{1}{p}\iota_s'G_{\alpha\iota}'\iota_p\alpha+\frac{1}{p}\iota_s'G_{\alpha\iota}'Z_t'\gamma+\frac{1}{p}\iota_s'G_{\alpha\iota}'u_t;\ t=1,2,\ldots,T$$

$(\bar{K}''_{(1)})$ $E(\frac{1}{p}\iota_s'G_{\alpha\iota}'u_t)=o\ \forall t;\ E(\frac{1}{p2}\iota_s'G_{\alpha\iota}'u_tu_t'G_{\alpha\iota}\iota_s)=\frac{1}{p}(\sigma^2+(P-1)\rho)\ \forall t;$

$$E(\frac{1}{p2}\iota_s'G_{\alpha\iota}'u_tu_{t'}'G_{\alpha\iota}\iota_s)=o\ \forall t\neq t';\alpha\in\mathbb{R}^1;\gamma\in\mathbb{R}^{n-1};\ o<\sigma^2+(P-1)\rho<\infty$$

und

$$G_{\alpha\iota}'(I-\frac{1}{p}\iota_p\iota_p')y_t=G_{\alpha\iota}'(I-\frac{1}{p}\iota_p\iota_p')Z_t'+G_{\alpha\iota}'(I-\frac{1}{p}\iota_p\iota_p')u_t;\ t=1,2,\ldots,T$$

$$E(G_{\alpha\iota}'(I-\frac{1}{p}\iota_p\iota_p')u_t)=o\ \forall t;E(G_{\alpha\iota}'(I-\frac{1}{p}\iota_p\iota_p')u_tu_{t'}'(I-\frac{1}{p}\iota_p\iota_p')G_{\alpha\iota})=o\ \forall\ t\neq t';$$

$(\bar{K}''_{(2)})$

$$E(G_{\alpha\iota}'(I-\frac{1}{p}\iota_p\iota_p')u_tu_t'(I-\frac{1}{p}\iota_p\iota_p')G_{\alpha\iota})=(\sigma^2-\rho)G_{\alpha\iota}'(I-\frac{1}{p}\iota_p\iota_p')G_{\alpha\iota}\ \forall t;$$

$$\gamma\in\mathbb{R}^{n-1};\ o<\sigma^2-\rho<\infty.$$

Zur Schätzung von $\sigma^2+(P-1)\rho$ sind die KQ-Residuen des Modells $(\bar{K}''_{(1)})$

$$\hat{u}_{(1)t}=\bar{y}_t-\hat{\alpha}_{(1)}-\bar{z}_t'\hat{\gamma}_{(1)}$$

heranzuziehen, wobei

$$\hat{\gamma}_{(1)}=\{\sum_{t=1}^{T}\bar{z}_t\bar{z}_t'-T\bar{z}\bar{z}'\}^{-1}\{\sum_{t=1}^{T}\bar{z}_t\bar{y}_t-T\bar{z}\bar{y}\}$$

$$\hat{\alpha}_{(1)}=\bar{y}-\bar{z}'\gamma_{(1)}$$

die einfachen KQ-Schätungen sind. Die erwartungstreue Schätzung von $\sigma^2+(P-1)\rho$ kann somit durch

$$\widehat{\sigma^2+(P-1)\rho}=\frac{p}{T-n}\sum_{t=1}^{T}\hat{u}_{(1)t}'\hat{u}_{(1)t}$$

---

1) Durch das Modell $(\bar{K}''_{(1)})$ wird mit $\iota_p=G_{\alpha\iota}\iota_s$ die Beziehung zwischen den sich durch Mittelung über die ökonomischen Einheiten ergebenden Variablen $\bar{y}_t$ und $\bar{z}_{1t},\ldots,\bar{z}_{n-1,t}$ beschrieben. Entsprechend hat das Modell $(\bar{K}''_{(2)})$ die Schätzung von Beziehungen zwischen den Variablen zum Inhalt, durch die die Abweichung der Gruppenvariablen von jenem Durchschnitt beschrieben werden.

vorgenommen werden. Entsprechend ist durch die KQ-Residuen

$$\hat{u}_{(2)t} = G_{\sigma_1}'(I-\frac{1}{p}\imath p\imath p')y_t - G_{\sigma_1}'(I-\frac{1}{p}\imath p\imath p')Z_t'\,\hat{\gamma}_{(2)}$$

des Modells $(\bar{R}''_{(2)})$ unter Verwendung der für γ im Rahmen dieses Modells zu ermittelnden Schätzung

$$\hat{\gamma}_{(2)}=\{\sum_{t=1}^{T} Z_t(I-\frac{1}{p}\imath p\imath p')G_{\sigma_1}(G_{\sigma_1}'G_{\sigma_1})^{-1}G_{\sigma_1}'(I-\frac{1}{p}\imath p\imath p')Z_t'\}^{-1} *$$

$$\sum_{t=1}^{T} Z_t(I-\frac{1}{p}\imath p\imath p')G_{\sigma_1}(G_{\sigma_1}'G_{\sigma_1})^{-1}G_{\sigma_1}'(I-\frac{1}{p}\imath p\imath p')y_t$$

σ^2-ρ erwartungstreu zu schätzen, denn die Erwartungstreue von

$$\widehat{\sigma^2\text{-}\rho} = \frac{1}{T(S-1)-(n-1)} \sum_{t=1}^{T} \hat{u}_{(2)t}'(G_{\sigma_1}'G_{\sigma_1})^{-1}\hat{u}_{(2)t}$$

ist mit

$$\hat{u}_{(2)t}=G_{\sigma_1}'(I-\frac{1}{p}\imath p\imath p')u_t-G_{\sigma_1}'(I-\frac{1}{p}\imath p\imath p')Z_t'\{\sum_{t=1}^{T} Z_t(I-\frac{1}{p}\imath p\imath p')P_{\sigma_1}(I-\frac{1}{p}\imath p\imath p')Z_t'\}^{-1} *$$

$$\sum_{t=1}^{T} Z_t(I-\frac{1}{p}\imath p\imath p')P_{\sigma_1}(I-\frac{1}{p}\imath p\imath p')u_t$$

und

$$E(\sum_{t=1}^{T} \hat{u}_{(2)t}'(G_{\sigma_1}'G_{\sigma_1})^{-1}\hat{u}_{(2)t})$$

$$=(\sigma^2-\rho)\Big\{\sum_{t=1}^{T} sp(I-\frac{1}{p}\imath p\imath p')P_{\sigma_1}(I-\frac{1}{p}\imath p\imath p')-\sum_{t=1}^{T} sp(I-\frac{1}{p}\imath p\imath p')P_{\sigma_1}(I-\frac{1}{p}\imath p\imath p')Z_t'\ *$$

$$\{\sum_{t=1}^{T} Z_t(I-\frac{1}{p}\imath p\imath p')P_{\sigma_1}(I-\frac{1}{p}\imath p\imath p')Z_t'\}^{-1}Z_t(I-\frac{1}{p}\imath p\imath p')P_{\sigma_1}(I-\frac{1}{p}\imath p\imath p')\Big\}$$

$$=(\sigma^2-\rho)\{T(S-1)-(n-1)\}$$

gezeigt.

3.2.2. Allgemeine Schätzung

Sei zuerst das Modell (M) als ursprüngliches Modell zugrunde gelegt, also σ^2 im Rahmen des Modells ($\bar{M}$) geschätzt. Mit

$$(\bar{S}.3) \quad \overset{\vee}{\sigma}^2 = \{rg\ G-n\}^{-1}\overset{\vee}{\bar{u}}'(G'G)^{+}\overset{\vee}{\bar{u}}$$

steht eine erwartungstreue Schätzung für σ^2 zur Verfügung, die auch, wenn man

$$\overset{\vee}{\bar{u}} = \bar{y} - \bar{X}\overset{\vee}{\beta} = \bar{y} - \bar{X}\{\bar{X}'(G'G)^{+}\bar{X}\}^{-1}\bar{X}'(G'G)^{+}\bar{y}$$

verwendet, durch

$$\gamma^2 = \{rg\ G-n\}^{-1}\ \bar{y}'\{(G'G)^{+}-(G'G)^{+}\bar{X}\{\bar{X}'(G'G)^{+}\bar{X}\}^{-1}\bar{X}'(G'G)^{+}\}\bar{y}$$

zu bestimmen ist. Die Erwartungstreue kann, da

$$\overset{\vee}{\bar{u}} = \bar{u} - \bar{X}\{\bar{X}'(G'G)^{+}\bar{X}\}^{-1}\bar{X}'(G'G)^{+}\bar{u}$$

gilt, mit

$$E(\bar{u}'\{(G'G)^{+}-(G'G)^{+}\bar{X}\{\bar{X}'(G'G)^{+}\bar{X}\}^{-1}\bar{X}'(G'G)^{+}\}\bar{u})$$

$$= \sigma^2\{sp(G'G)^{+}G'G - sp(G'G)^{+}\bar{X}\{\bar{X}'(G'G)^{+}\bar{X}\}^{-1}\bar{X}'(G'G)^{+}G'G\}$$

$$= \sigma^2\{rg\ G-n\}$$

eingesehen werden.

Wird nun zusätzlich angenommen, daß die Störvariable normalverteilt ist, kann die Varianz dieser Schätzung mit

$$(\bar{S}.4) \quad V(\overset{\vee}{\sigma}^2) = 2\ \sigma^4\{rg\ G-n\}^{-1}$$

angegeben werden.[1) 2)] Um zu zeigen, daß unter dieser Voraussetzung γ^2 die beste quadratisch unverzerrte Schätzung ist, sei durch

$$\overset{\wedge}{\sigma}^2 = \bar{y}'(A+B)\bar{y}$$

---

1) Vgl. P. Balestra (1973), S. 2o, Lemma 5

2) Hier wie im folgenden wird stets die Normalverteilung der Störvariablen vorausgesetzt, da eine eingehende Diskussion der Eigenschaften von quadratisch unverzerrten Schätzungen unter schwächeren Voraussetzungen, etwa einer normalen Kurtosis, im Rahmen dieser Arbeit nicht beabsichtigt ist.

mit

$$A=\{rg\ G-n\}^{-1}\{(G'G)^{+}-(G'G)^{+}\bar{X}\{\bar{X}'(G'G)^{+}\bar{X}\}^{-1}\bar{X}'(G'G)^{+}\}$$

eine weitere quadratisch unverzerrte Schätzung gegeben, wobei

$$\bar{X}'B\ \bar{X} = o$$

$$sp\{G'GB\} = o$$

gelten muß, damit diese Schätzung erwartungstreu ist. Da nun

$$V(\overset{\sim}{\sigma}^2) = 2\ \sigma^4\ sp\{G'G(A+B)G'G(A+B)\}$$

$$= 2\ \sigma^4\{sp\{G'GAG'GA\}+2\ sp\{G'GAG'GB\}+sp\{G'GBG'GB\}\}$$

ist und

$$sp\{G'GAG'GB\}=\{rg\ G-n\}^{-1}\ sp\{G'G(I-(G'G)^{+}\bar{X}\{\bar{X}'G'G)^{+}\bar{X}\}^{-1}\bar{X}')B\}$$

$$=\{rg\ G-n\}^{-1}\ sp\{G'GB\} = o$$

gilt, denn aus $\bar{X}'B\bar{X}=o$ folgt, daß sich B stets durch

$$B = (I-\bar{X}(\bar{X}'\bar{X})^{-1}\bar{X}')\ C\ (I-\bar{X}(\bar{X}'\bar{X})^{-1}\bar{X}')\ ,\quad C \in \mathbb{R}^{sxs}$$

darstellen läßt, muß σ^2 die beste quadratisch unverzerrte Schätzung von σ^2 bei normalverteilter Störvariable sein, denn es gilt

$$sp\{G'GBG'GB\} \geq o.$$

Die Schätzung der V-Struktur des Modells (M') aufgrund des Modells ($\bar{M}'$) kann natürlich entsprechend durch

($\bar{5}'3$) $\sigma^2=\{rg\ G-n\}^{-1}\ \overset{\vee}{u}'(G'\Sigma G)^{+}\ \overset{\vee}{u}$

beziehungsweise mit

$$\overset{\vee}{u} = \bar{y} - \bar{X}\{\bar{X}'(G'\Sigma G)^{+}\bar{X}\}^{-1}\bar{X}'(G'\Sigma G)^{+}\bar{y}$$

durch

$$\sigma^2=\{rg\ G-n\}^{-1}\ \bar{y}'\{(G'\Sigma G)^{+}-(G'\Sigma G)^{+}\bar{X}\{\bar{X}'(G'\Sigma G)^{+}\bar{X}\}^{-1}\bar{X}'(G'\Sigma G)^{+}\}\bar{y}$$

vorgenommen werden. Die Varianz dieser Schätzung, wiederum eine normalverteilte Störvariable unterstellt, ist ebenfalls

($\bar{5}.'4$) $V(\overset{\vee}{\sigma}^2) = 2\ \sigma^4\{rg\ G-n\}^{-1}$.

Um nun die V-Struktur des Modells (M") im Rahmen des Modells ($\bar{M}$") zu schätzen, sei in Analogie zu obigem exemplarischen Vorgehen nach einer geeigneten Aufspaltung des Modells ($\bar{M}$") in Teilmodelle ($\bar{M}"_{(k)}$) gesucht. Wenn die Aggregationsmatrix G die Eigenschaft

$$P_G\,\Omega_k = \Omega_k P_G \quad \forall k \in \mathfrak{J}$$

besitzt,[1] so ist wegen

$$G'\Omega_k G(G'G)^+G' = G'\Omega_k \quad \forall k \in \mathfrak{J}$$

das Modell

$$G'\Omega_k G(G'G)^+\bar{y} = G'\Omega_k G(G'G)^+\bar{X}\beta + G'\Omega_k G(G'G)^+\,\bar{u}$$

$$(\bar{M}"_{(k)})\quad E(G'\Omega_k G(G'G)^+\bar{u})=0;\ E(G'\Omega_k G(G'G)^+\bar{u}\,\bar{u}'(G'G)^+G'\Omega_k G)=\omega_k{}^2\,G'\Omega_k G;$$

$$\beta \in \mathbb{R}^n;\ 0<\omega_k{}^2<\infty$$

zur Schätzung von $\omega_k{}^2$ heranzuziehen. Die verallgemeinerte KQ-Schätzung

$$(\bar{S}".3)\quad \hat{\omega}_k{}^2 = \{rg\ G'\Omega_k - rg\ G'\Omega_k G(G'G)^+\bar{X}\}^{-1}\,\hat{u}_{(k)}'(G'\Omega_k G)^+\hat{u}_{(k)}$$

mit

$$\hat{u}_{(k)} = G'\Omega_k G(G'G)^+\,\bar{y} - G'\Omega_k G(G'G)^+\bar{X}\,\hat{\beta}_{(k)}$$

und

$$\hat{\beta}_{(k)} = \{\bar{X}'(G'G)^+G'\Omega_k G(G'\Omega_k G)^+G'\Omega_k G(G'G)^+\bar{X}\}^+ \ *$$

$$\bar{X}'(G'G)^+G'\Omega_k G(G'\Omega_k G)^+G'\Omega_k G(G'G)^+\,\bar{y}$$

$$= \{\bar{X}'(G'G)^+G'\Omega_k G(G'G)^+\bar{X}\}^+\bar{X}'(G'G)^+G'\Omega_k G(G'G)^+\,\bar{y}$$

ist jedoch nur dann möglich, wenn nicht nur G'G und $G'\Omega_k G$ bekannt sind, sondern auch $rg\ G'\Omega_k > rg\ G'\Omega_k G(G'G)^+\bar{X}$ ist.

Diese Schätzung kann auch durch

$$\hat{\omega}_k{}^2 = \{rg\ G'\Omega_k - rg\ G'\Omega_k G(G'G)^+\bar{X}\}^{-1}\,\bar{y}'\{(G'G)^+G'\Omega_k G(G'G)^+ -$$

$$(G'G)^+G'\Omega_k G(G'G)^+\bar{X}\{\bar{X}'(G'G)^+G'\Omega_k G(G'G)^+\bar{X}\}^+\bar{X}'(G'G)^+G'\Omega_k G(G'G)^+\}\bar{y}$$

---

1) Die oben besprochenen Aggregationsmatrizen erfüllen, wie leicht nachzuprüfen ist, diese Bedingung.

und, auf eine explizite Berücksichtigung der aggregierten Variablen verzichtend, durch

$$\hat{\omega}_k^2 = \{rg\ G'\Omega_k - rg\ G'\Omega_k X\}^{-1} \ *$$

$$y'\{P_G\Omega_k P_G - P_G\Omega_k P_G X\{X'P_G\Omega_k P_G X\}^{+}X'P_G\Omega_k P_G\}y$$

beschrieben werden. Die Erwartungstreue dieser Schätzung läßt sich nun, die Vertauschbarkeit der Matrizen P_G und Ω_i ausnutzend, unmittelbar zeigen, denn es ist

$$E(\hat{\omega}_k^2) = \{rg\ G'\Omega_k - rg\ G'\Omega_k X\}^{-1} \cdot Ey'\{P_G\Omega_k - P_G\Omega_k X\{X'P_G\Omega_k X\}^{+}X'P_G\Omega_k\}y$$

$$= \{rg\ G'\Omega_k - rg\ G'\Omega_k X\}^{-1} \cdot Eu'\{P_G\Omega_k - P_G\Omega_k X\{X'P_G\Omega_k X\}^{+}X'P_G\Omega_k\}u$$

$$= \{rg\ G'\Omega_k - rg\ G'\Omega_k X\}^{-1} \cdot sp\{P_G\Omega_k - P_G\Omega_k X\{X'P_G\Omega_k X\}^{+}X'P_G\Omega_k\} \sum_i \omega_i^2\Omega_i$$

$$= \{rg\ G'\Omega_k - rg\ G'\Omega_k X\}^{-1} \cdot \{rg\ G'\Omega_k - rg\ G'\Omega_k X\}\ \omega_k^2 = \omega_k^2.$$

Die Varianz dieser Schätzung ist, wiederum von einer normalverteilten Störvariablen ausgegangen, durch [1]

$$(5''.4) \quad V(\hat{\omega}_k^2) = \{rg\ G'\Omega_k - rg\ G'\Omega_k X\}^{-2}\ 2\ sp\{P_G\Omega_k - P_G\Omega_k X\{X'P_G\Omega_k X\}^{+}X'P_G\Omega_k\} *$$

$$\sum_{i\in\mathfrak{J}} \omega_i^2\Omega_i \{P_G\Omega_k - P_G\Omega_k X\{X'P_G\Omega_k X\}^{+}X'P_G\Omega_k\} \sum_{i\in\mathfrak{J}} \omega_i^2\Omega_i$$

$$= 2\ \omega_k^4 \{rg\ G'\Omega_k - rg\ G'\Omega_k X\}^{-1}$$

zu bestimmen. Ferner zeigt sich, daß wegen

$$Cov(\hat{\omega}_k^2, \hat{\omega}_l^2) = \{rg\ G'\Omega_k - rg\ G'\Omega_k X\}^{-1}\{rg\ G'\Omega_l - rg\ G'\Omega_l X\}^{-1} \ *$$

$$2\ sp\{P_G\Omega_k - P_G\Omega_k X\{X'P_G\Omega_k X\}^{+}X'P_G\Omega_k\} \sum_{i\in\mathfrak{J}} \omega_i^2\Omega_i \ *$$

$$\{P_G\Omega_l - P_G\Omega_l X\{X'P_G\Omega_l X\}^{+}X'P_G\Omega_l\} \sum_{i\in\mathfrak{J}} \omega_i^2\Omega_i$$

$$= 0$$

die einzelnen Schätzungen der Varianzkomponenten unabhängig voneinander sind.

---

1) Vgl. P. Balestra (1973), S. 2o, Lemma 6

Nun ist das Problem der Varianzkomponentenschätzung auch einer direkten Lösung zugänglich, bei der auf eine explizite Bestimmung von Teilmodellen verzichtet wird. Von einer quadratischen Schätzung für ω_k^2, etwa

$$\hat{\hat{\omega}}_k^2 = \bar{y}'\bar{A}_k\,\bar{y},$$

wird zum einen zu verlangen sein, daß

$$\hat{\hat{\omega}}_k^2 \geq 0 \qquad \forall \bar{y} \in \mathbb{R}^S$$

gilt, daß also $\bar{A}_k$ positiv semidefinit ist. Zum anderen wird wegen

$$E(\hat{\hat{\omega}}_k^2) = \beta'\bar{X}'\bar{A}_k\bar{X}\beta + \sum_{i\in\mathfrak{z}} \omega_i^2\, sp\{\bar{A}_k\, G'\Omega_i G\}$$

zu fordern sein, daß $\bar{A}_k$ die Bedingungen

$$\bar{X}'\bar{A}_k\bar{X} = 0$$

$$sp\{\bar{A}_k\, G'\Omega_i G\} = \begin{cases} 1 & i=k \\ 0 & i\neq k \end{cases}$$

erfüllt, denn dadurch wird die Erwartungstreue der Schätzung $\hat{\hat{\omega}}_k^2$ sichergestellt.

Daß die Schätzung

$$\hat{\omega}_k^2 = \{rg\, G'\Omega_k - rg\, G'\Omega_k X\}^{-1}\, \bar{y}'\{(G'G)^+G'\Omega_k G(G'G)^+ - (G'G)^+G'\Omega_k G(G'G)^+\bar{X} \cdot$$

$$\{\bar{X}'(G'G)^+G'\Omega_k G(G'G)^+\bar{X}\}^+\bar{X}'(G'G)^+G'\Omega_k G(G'G)^+\}\bar{y}$$

$$= \bar{y}'A_k^*\,\bar{y}$$

die Vertauschbarkeit der Matrizen P_G und Ω_i für alle i aus $\mathfrak{z}$ vorausgesetzt, diese Bedingungen erfüllt, kann unmittelbar eingesehen werden, daß die Schätzung $\hat{\omega}_k^2$ unter diesen Voraussetzungen sogar die gleichmäßig beste quadratisch unverzerrte Schätzung ist, muß jedoch gezeigt werden. Sei

$$\hat{\hat{\omega}}_k^2 = \bar{y}'\bar{A}_k\bar{y} = \bar{y}'\{\bar{A}_k^* + B\}\bar{y}\ ,$$

so muß zum einen

$$\bar{X}'B\,\bar{X} = 0$$

$$sp\{B\, G'\Omega_i G\} = 0 \qquad \forall i\in\mathfrak{z}$$

gelten, zum anderen wird man zwar nicht verlangen müssen, daß B positiv semidefinit ist, da aber A_k^*+B positiv semidefinit sein muß, wird man fordern müssen, daß B symmetrisch ist und

$$\Omega_i GBG'\Omega_i \quad \text{p.s.d.} \qquad \forall i \in \mathfrak{J}\backslash\{k\}$$

gilt, denn für alle i aus $\mathfrak{J}\backslash\{k\}$ ist $\Omega_i G \bar{A}_k^* G' \Omega_i$ gleich Null. Wegen

$$sp\{BG'\Omega_i G\} = sp\{\Omega_i GBG'\Omega_i\} = o \qquad \forall i \in \mathfrak{J}$$

kann geschlossen werden, daß

$$\Omega_i GBG'\Omega_i = o \qquad \forall i \in \mathfrak{J}\backslash\{k\}$$

gilt, daß es somit eine Matrix C gibt, so daß B durch[1)]

$$B=(G'G)^{-1}G'\Omega_k C\Omega_k G(G'G)^{-1}$$

darzustellen ist. Schließlich gibt es wegen

$$\bar{X}'(G'G)^{-1}G'\Omega_k C\Omega_k G(G'G)^{-1}\bar{X} = o$$

eine Matrix D, so daß C durch

$$C=D-\Omega_k G(G'G)^{-1}\bar{X}\{\bar{X}'(G'G)^{-1}G'\Omega_k G(G'G)^{-1}\bar{X}\}^+\bar{X}'(G'G)^{-1}G'\Omega_k D \; *$$

$$\Omega_k G(G'G)^{-1}\bar{X}\{\bar{X}'(G'G)^{-1}G'\Omega_k G(G'G)^{-1}\bar{X}\}^+\bar{X}'(G'G)^{-1}G'\Omega_k$$

und somit B durch

$$B=(G'G)^{-1}G'\Omega_k D\Omega_k G(G'G)^{-1}-(G'G)^{-1}G'\Omega_k G(G'G)^{-1}\bar{X}\{\bar{X}'(G'G)^{-1}G'\Omega_k G(G'G)^{-1}\bar{X}\}^+ *$$

$$\bar{X}'(G'G)^{-1}G'\Omega_k D\Omega_k G(G'G)^{-1}\bar{X}\{\bar{X}'(G'G)^{-1}G'\Omega_k G(G'G)^{-1}\bar{X}\}^+\bar{X}'(G'G)^{-1}G'\Omega_k G(G'G)^{-1}$$

darzustellen ist.

Wegen

$$V(\bar{y}'\bar{A}_k\bar{y})=2\,sp\{\bar{A}_k^* \sum_{i\in\mathfrak{J}}\omega_i^2 G'\Omega_i G\}^2+2\,sp\{B\sum_{i\in\mathfrak{J}}\omega_i^2 G'\Omega_i G\}^2$$

$$+4\,sp\{\bar{A}_k^*\sum_{i\in\mathfrak{J}}\omega_i^2 G\Omega_i G\; B\sum_{i\in\mathfrak{J}}\omega_i^2 G'\Omega_i G\}$$

---

1) Ohne wesentliche Beschränkung der Allgemeinheit sei von einer regulären Matrix G'G ausgegangen.

muß, um die Optimalität der Schätzung $\hat{\omega}_k^2$ zu zeigen, nachgewiesen werden, daß

$$sp\{\bar{A}_k^* \sum_{i\in\mathfrak{J}} \omega_i^2 G'\Omega_i G \; B \sum_{i\in\mathfrak{J}} \omega_i^2 G'\Omega_i G\}=o$$

gilt. Da nun

$$\sum_{i\in\mathfrak{J}} \omega_i^2 \; G'\Omega_i G \; \bar{A}_k^* \sum_{i\in\mathfrak{J}} \omega_i^2 \; G'\Omega_i G$$

$$= \omega_k^4\{rg\; G'\Omega_k - rg\; G'\Omega_k X\}^{-1}\{G'\Omega_k G - G'\Omega_k G(G'G)^{-1}\bar{X} *$$

$$\{\bar{X}'(G'G)^{-1}G'\Omega_k G(G'G)^{-1}\bar{X}\}^{+}\bar{X}'(G'G)^{-1}G'\Omega_k G\}$$

sowie

$$sp\{BG'\Omega_k G\}=o$$

gilt, muß nur noch

$$sp\{G'\Omega_k G(G'G)^{-1}\bar{X}\{\bar{X}'(G'G)^{-1}G'\Omega_k G(G'G)^{-1}\bar{X}\}^{+}\bar{X}'(G'G)^{-1}G'\Omega_k GB\}=0$$

gezeigt werden. Die oben gewonnene Darstellung von B verwendend, ergibt sich, daß

$$\bar{X}'(G'G)^{-1}G'\Omega_k GBG'\Omega_k G(G'G)^{-1}\bar{X}$$

$$=\bar{X}'(G'G)^{-1}G'\Omega_k D\Omega_k G(G'G)^{-1}\bar{X}-\bar{X}'(G'G)^{-1}G'\Omega_k G(G'G)^{-1}\bar{X}\{\bar{X}(G'G)^{-1}G'\Omega_k G(G'G)^{-1}\bar{X}\}^{+} *$$

$$\bar{X}'(G'G)^{-1}G'\Omega_k D\Omega_k G(G'G)^{-1}\bar{X}\{\bar{X}'(G'G)^{-1}G'\Omega_k G(G'G)^{-1}\bar{X}\}^{+}\bar{X}(G'G)^{-1}G'\Omega_k G(G'G)^{+}\bar{X}=o$$

gilt und die Optimalität von $\hat{\omega}_k^2$ somit gezeigt ist.[1)]

Verzichtet man nun auf die Voraussetzung der Vertauschbarkeit, so ist es auch noch möglich, die Varianzkomponenten bzw. lineare Funktionen derselben quadratisch unverzerrt zu schätzen. Auf eine eingehende Behandlung dieser Schätzungen[2)] wird jedoch verzichtet.

---

1) Dieses Ergebnis ist auch dem Vorgehen von P. Balestra (1973), S. 24-26, analog zu zeigen.

2) vgl. C.R. Rao (1971,1) und (1971,2) sowie die dort angegebene Literatur.

3.3 Test der E-Struktur

3.3.1. Beispiele

Sei zuerst eine vereinfachte Version des Modells (Z), das Modell

$$y_t = \beta + u_t \; ; \; t=1,2,\ldots,T$$

$$(Z^*) \quad E(u_t)=o \; \forall t, \; E(u_t u_t')=\sigma^2 I_4 \; \forall t, \; E(u_t u_t')=o \; \forall t\neq t';$$

$$\beta \in \mathbb{R}^4, \; o<\sigma^2<\infty; \; u_t \text{ ist normalverteilt ;}$$

zugrunde gelegt. Sei nun

$$\hat{u}_t=y_t-\frac{1}{T}\sum_t y_t = u_t - \frac{1}{T}\sum_t u_t$$

$$\hat{\hat{u}}_t=y_t-\frac{1}{4}\iota_4\iota_4'\frac{1}{T}\sum_t y_t=(I_4-\frac{1}{4}\iota_4\iota_4')\beta+u_t-\frac{1}{4}\iota_4\iota_4'\frac{1}{T}\sum_t u_t$$

so ergibt sich, die Gültigkeit des Modells (Z^*) vorausgesetzt,[1)2)]

$$\frac{1}{\sigma 2}\sum_t \hat{u}_t'\hat{u}_t=\frac{1}{\sigma 2}\, u'\{(I_T-\frac{1}{T}\iota_T\iota_T')\otimes I_4\}u \sim \chi^2_{4(T-1)}$$

$$\frac{1}{\sigma 2}\sum_t(\hat{\hat{u}}_t'\hat{\hat{u}}_t-\hat{u}_t'\hat{u}_t)=\frac{1}{\sigma 2}\Big[u'\{\frac{1}{T}\iota_T\iota_T'\otimes(I_4-\frac{1}{4}\iota_4\iota_4')\}\,u$$
$$+2\beta'\{\iota_T'\otimes(I_4-\frac{1}{4}\iota_4\iota_4')\}u+T\beta'(I_4-\frac{1}{4}\iota_4\iota_4')\beta\Big] \sim \chi^2_{3,\lambda}$$

wobei

$$\lambda=\frac{T}{\sigma 2}\,\beta'(I_4-\frac{1}{4}\iota_4\iota_4')\beta.$$

Wegen

$$\{(I_T-\frac{1}{T}\iota_T\iota_T')\otimes I_4\}\{\frac{1}{T}\iota_T\iota_T'\otimes(I_4-\frac{1}{4}\iota_4\iota_4')\}=o$$

$$\{(I_T-\frac{1}{T}\iota_T\iota_T')\otimes I_4\}\{\iota_T\otimes(I_4-\frac{1}{4}\iota_4\iota_4')\}\beta=o$$

folgt somit die Variable

$$\frac{\frac{1}{3}\sum_t(\hat{\hat{u}}_t'\hat{\hat{u}}_t-\hat{u}_t'\hat{u}_t)}{\frac{1}{4(T-1)}\sum_t \hat{u}_t'\hat{u}_t}$$

---

1) vgl. C.R. Rao und S.K. Mitra (1971), Kapitel 9, insbesondere Lemma 9.1.2. und 9.4.1.

2) $u'=(u_1',\ldots,u_T')$

einer nicht zentralen F-Verteilung, gilt jedoch

$$H_o: \beta = \iota_4\beta_o \ , \ \beta_o \in \mathbb{R}^1$$

so folgt diese Variable einer zentralen F-Verteilung, denn es ist

$$\sigma^2\lambda = T\,\beta'(I_4 - \tfrac{1}{4}\iota_4\iota_4')\beta = T\beta_o\iota_4'\{I_4 - \tfrac{1}{4}\iota_4\iota_4'\}\iota_4\beta_o = o$$

Ein Test auf Saisonstruktur wird nun auf dieser Variablen wie folgt aufgebaut. Gilt

$$\frac{\frac{1}{3}\sum_{t=1}^{T}(\hat{\hat{u}}_t'\hat{\hat{u}}_t - \hat{u}_t'\hat{u}_t)}{\frac{1}{4(T-1)}\sum_{t=1}^{T}\hat{u}_t'\hat{u}_t} > F^3_{4(T-1)\,;\alpha}$$

wobei α der vorgegebene Fehler erster Art ist, wird man die Hypothese H_o ablehnen und somit von einer ausgeprägten, signifikanten Saisonstruktur sprechen. Umgekehrt wird man die Hypothese nicht verwerfen und somit von einer nicht signifikanten Saisonstruktur sprechen.

Liegt nun das aggregierte Modell

$$(\bar{Z}^*)\qquad \begin{aligned} &\iota_4'y_t = \iota_4'\beta + \iota_4'u_t \quad t=1,2,\ldots,T_1\\ &y_t = \beta + u_t \quad t=T_1+1,\ldots,T_1+T_2\\ &E(\iota_4'u_t)=o\ \forall\, t\le T_1,\ E(\iota_4'u_tu_t'\iota_4)=4\sigma^2\ \forall\, t\le T_1,\\ &E(u_t)=o\ \forall\, t>T_1,\ E(u_tu_t')=\sigma^2 I_4\ \forall\, t>T_1,\\ &E(\iota_4'u_tu_{t'}'\iota_4)=o \quad \forall\, t\neq t',\ E(u_tu_{t'}')=o\ \forall\, t\neq t';\\ &\beta\in\mathbb{R}^4,\ o<\sigma^2<\infty;\ \iota_4'u_t \text{ und } u_t \text{ sind normalverteilt;} \end{aligned}$$

vor, so kann von

$$\left.\begin{aligned} \hat{u}_t &= y_t - \frac{1}{T_2}\sum_{t=T_1+1}^{T_1+T_2} y_t = u_t - \frac{1}{T_2}\sum_{t=T_1+1}^{T_1+T_2} u_t\\ \hat{\hat{u}}_t &= y_t - \tfrac{1}{4}\iota_4\iota_4'\frac{1}{T_2}\sum_{t=T_1+1}^{T_1+T_2} y_t = u_t - \tfrac{1}{4}\iota_4\iota_4'\frac{1}{T_2}\sum_{t=T_1+1}^{T_1+T_2} u_t + (I_4 - \tfrac{1}{4}\iota_4\iota_4')\beta \end{aligned}\right\} t>T_1$$

ausgehend durch

$$\frac{\frac{1}{3}\sum_{t=T_1+1}^{T_1+T_2}(\hat{\hat{u}}_t'\hat{\hat{u}}_t-\hat{u}_t'\hat{u}_t)}{\frac{1}{4(T_2-1)}\sum_{t=T_1+1}^{T_1+T_2}\hat{u}_t'\hat{u}_t}$$

eine Testvariable konstruiert werden, die einer nicht zentralen F-Verteilung ($\lambda=\frac{T_2}{\sigma^2}\beta'(I_4-\frac{1}{4}\iota_4\iota_4')\beta$) folgt. Zu beachten ist, daß diese Testvariable natürlich nur dann zu berechnen ist, wenn $T_2>1$ gilt.

Es läßt sich nun aber ein mächtigerer Test konstruieren, der zudem auch für $T_2=1$ anzuwenden ist, indem man die bisher nicht herangezogenen Beobachtungen der T_1 Jahresvariablen $\iota_4'y_t$ berücksichtigt. Sei

$$\hat{u}_t^{*}=\iota_4'y_t-\iota_4'\hat{\beta} \qquad t\leq T_1$$

$$\hat{u}_t^{**}=y_t-\hat{\beta} \qquad t>T_1$$

und

$$\hat{\beta}=\{\sum_{t=1}^{T_1}\frac{1}{4}\iota_4\iota_4'+\sum_{t=T_1+1}^{T_1+T_2}I_4\}^{-1}\{\sum_{t=1}^{T_1}\frac{1}{4}\iota_4\iota_4'y_t+\sum_{t=T_1+1}^{T_1+T_2}y_t\}$$

$$=\frac{1}{4}\iota_4\iota_4'\frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T_1+T_2}y_t+(I-\frac{1}{4}\iota_4\iota_4')\frac{1}{T_2}\sum_{t=T_1+1}^{T_1+T_2}y_t$$

so ergibt sich [1]

$$\frac{1}{\sigma^2}\{\sum_{t=1}^{T_1}\frac{1}{4}\hat{u}_t^{*}\hat{u}_t^{*}+\sum_{t=T_1+1}^{T_1+T_2}\hat{u}_t^{**}\hat{u}_t^{**}\}$$

$$=\frac{1}{\sigma^2}\{\sum_{t=1}^{T_1+T_2}u_t'\frac{1}{4}\iota_4\iota_4'u_t-\frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T_1+T_2}u_t'\frac{1}{4}\iota_4\iota_4'\sum_{t=1}^{T_1+T_2}u_t$$

$$+\sum_{t=T_1+1}^{T_1+T_2}u_t'(I_4-\frac{1}{4}\iota_4\iota_4')u_t-\frac{1}{T_2}\sum_{t=T_1+1}^{T_1+T_2}u_t'(I_4-\frac{1}{4}\iota_4\iota_4')\sum_{t=T_1+1}^{T_1+T_2}u_t\}$$

$$=\frac{1}{\sigma^2}\{u'\{(I_T-\frac{1}{T}\iota_T\iota_T')\otimes\frac{1}{4}\iota_4\iota_4'\}u+u_{(2)}'\{(I_{T_2}-\frac{1}{T_2}\iota_{T_2}\iota_{T_2}')\otimes(I_4-\frac{1}{4}\iota_4\iota_4')\}u_{(2)}\}$$

$$\sim\chi^2_{4(T_2-1)+T_1}$$

---

1) $u_{(2)}'=(u_{T_1+1}',\ldots,u_{T_1+T_2}')$

Entsprechend ergibt sich aus

$$\hat{\hat{u}}^{*}_t = \iota_4' y_t - 4\hat{\beta}_o$$

$$\hat{\hat{u}}^{**}_t = y_t - \iota_4 \hat{\beta}_o$$

mit

$$\hat{\beta}_o = \frac{1}{4}\iota_4', \frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T_1+T_2} y_t$$

daß

$$\sum_{t=1}^{T_1} \frac{1}{4}\hat{\hat{u}}^{*}_t \hat{\hat{u}}^{*}_t + \sum_{t=T_1+1}^{T_1+T_2} \hat{\hat{u}}^{**}_t \hat{\hat{u}}^{**}_t$$

$$= \sum_{t=1}^{T_1+T_2} u_t' \frac{1}{4}\iota_4\iota_4' u_t - \frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T_1+T_2} u_t' \frac{1}{4}\iota_4\iota_4' \sum_{t=1}^{T_1+T_2} u_t + \sum_{t=T_1+1}^{T_1+T_2} u_t' (I_4 - \frac{1}{4}\iota_4\iota_4') u_t$$

$$+2\beta'(I_4 - \frac{1}{4}\iota_4\iota_4') \sum_{t=T_1+1}^{T_1+T_2} u_t + T_2 \beta'(I_4 - \frac{1}{4}\iota_4\iota_4')\beta$$

und somit

$$\frac{1}{\sigma^2}\{\sum_{t=1}^{T_1} \frac{1}{4}\hat{\hat{u}}^{*}_t \hat{\hat{u}}^{*}_t + \sum_{t=T_1+1}^{T_1+T_2} \hat{\hat{u}}^{**}_t \hat{\hat{u}}^{**}_t - \sum_{t=1}^{T_1} \frac{1}{4}\hat{\hat{u}}^{*}_t \hat{\hat{u}}^{*}_t - \sum_{t=T_1+1}^{T_1+T_2} \hat{\hat{u}}^{**}_t \hat{\hat{u}}^{**}_t\}$$

$$= \frac{1}{\sigma^2}\{\frac{1}{T_2}\sum_{t=T_1+1}^{T_1+T_2} u_t'(I_4 - \frac{1}{4}\iota_4\iota_4') \sum_{t=T_1+1}^{T_1+T_2} u_t + 2\beta'(I_4 - \frac{1}{4}\iota_4\iota_4') \sum_{t=T_1+1}^{T_1+T_2} u_t$$

$$+ T_2 \beta (I_4 - \frac{1}{4}\iota_4\iota_4')\beta\}$$

$$= \frac{1}{\sigma^2}\{u_{(2)}'\{\frac{1}{T_2}\iota_{T_2}\iota_{T_2}' \otimes (I_4 - \frac{1}{4}\iota_4\iota_4')\}u_{(2)} + 2\beta'\{\iota_{T_2}' \otimes (I_4 - \frac{1}{4}\iota_4\iota_4')\}u_{(2)}$$

$$+ T_2 \beta'(I_4 - \frac{1}{4}\iota_4\iota_4')\beta\}$$

$$\sim \chi^2_{3,\lambda} \quad ; \quad \lambda = \frac{T_2}{\sigma^2}\beta'(I_4 - \frac{1}{4}\iota_4\iota_4')\beta$$

gilt. Wegen

$$\begin{pmatrix} o, o \\ \\ o, \{\frac{1}{T_2}\iota_{T_2}\iota_{T_2}' \otimes (I_4 - \frac{1}{4}\iota_4\iota_4')\} \end{pmatrix} \left\{ \begin{pmatrix} (I_T - \frac{1}{T}\iota_T\iota_T') \otimes \frac{1}{4}\iota_4\iota_4' \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} o, o \\ \\ o, (I_{T_2} - \frac{1}{T_2}\iota_{T_2}\iota_{T_2}') \otimes (I_4 - \frac{1}{4}\iota_4\iota_4') \end{pmatrix} \right\} = o$$

ist schließlich die Unabhängigkeit der χ^2-Variablen gewährleistet. Die Variable

$$\frac{\frac{1}{3}\{\sum_{t=1}^{T_1}\frac{1}{4}\hat{u}_t^{*\prime}\hat{u}_t^{*}+\sum_{t=T_1+1}^{T_1+T_2}\hat{u}_t^{**\prime}\hat{u}_t^{**}-\sum_{t=1}^{T_1}\frac{1}{4}\hat{u}_t^{*\prime}\hat{u}_t^{*}-\sum_{t=T_1+1}^{T_1+T_2}\hat{u}_t^{**\prime}\hat{u}_t^{**}\}}{\frac{1}{4(T_2-1)+T_1}\{\sum_{t=1}^{T_1}\frac{1}{4}\hat{u}_t^{*\prime}\hat{u}_t^{*}+\sum_{t=T_1+1}^{T_1+T_2}\hat{u}_t^{**\prime}\hat{u}_t^{**}\}}$$

folgt somit einer nicht zentralen F-Verteilung und ist geeignet, zum Test auf Saisonstruktur herangezogen zu werden. Vergleicht man diese Testvariable mit der anfangs abgeleiteten Testvariablen, so ist festzustellen, daß der auf dieser Variablen basierende Test wegen

$$4(T_2-1)+T_1 \geq 4(T_2-1)$$

mächtiger ist.[1] Natürlich ist dieses Ergebnis nicht überraschend, denn durch eine Berücksichtigung der neben den Quartalsdaten noch vorhandenen Jahresdaten kann, wie unmittelbar einzusehen ist, die Varianzschätzung verbessert werden. Zudem, und darauf sei abschließend noch hingewiesen, gilt

$$\{\sum_{t=1}^{T_1}\frac{1}{4}\iota_4\iota_4'+\sum_{t=T_1+1}^{T_1+T_2}I_4\}^{-1}=\frac{1}{T_2}I_4-(\frac{1}{T_2}-\frac{1}{T})\frac{1}{4}\iota_4\iota_4' < \frac{1}{T_2}I_4,$$

kann also durch eine Berücksichtigung der Jahresdaten auch die Schätzung der Saisonstruktur verbessert werden.

Sei nun ein sich im Rahmen von Querschnittsmodellen stellendes Testproblem erläutert. So kann die Spezifikation des Modells (Q) dahingehend abgeschwächt werden, daß die Gültigkeit der linearen Beziehung

$$y_i = x_i'\beta+u_i$$

nur dann angenommen wird, wenn bei der ökonomischen Einheit i die Ausprägung b eines Merkmals $\mathfrak{L}$ festzustellen ist, daß aber

---

1) vgl. G.A.F. Seber (1966) Kapitel 5, Abschnitt 5.1.

wenn die Ausprägung $\bar{b}$ zu beobachten ist, die Gültigkeit der linearen Beziehung

$$y_i = x_i'(\beta+\delta) + u_i$$

unterstellt wird. Das so modifizierte Querschnittsmodell

$$(Q^*) \quad \begin{array}{l} y_i = x_i'\beta+u_i \qquad \forall i \in \mathfrak{J}(b) \\ y_i = x_i'(\beta+\delta)+u_i \quad \forall i \in \mathfrak{J}(\bar{b}) \\ E(u_i)=o \quad \forall i \in \mathfrak{J}\,,\; E(u_i^2)=\sigma^2 \;\forall\, i \in \mathfrak{J}\,,\; E(u_i u_j)=o \;\forall\, i \neq j; \\ \beta,\delta \in \mathbb{R}^n,\; o<\sigma^2<\infty \;;\; u_i \text{ normalverteilt} \;; \end{array}$$

soll einem Test auf Gleichheit der gruppenspezifischen Regressionskoeffizienten unterzogen werden. Dabei soll jedoch wiederum davon ausgegangen werden, daß Beobachtungswerte für Individualvariablen nicht vorliegen, daß aber auf Beobachtungswerte von nach einem Merkmal $\mathfrak{A}$ gruppierten Variablen zurückgegriffen werden kann.

Sind nur die Variablen

$$\sum_{i\in\mathfrak{J}(a_k)} y_i\,,\quad \sum_{i\in\mathfrak{J}(a_k,b)} x_i\,,\quad \sum_{i\in\mathfrak{J}(a_k,\bar{b})} x_i \qquad k=1,2,\ldots,S$$

beobachtet worden, so ist die Hypothese im Rahmen des aggregierten Modells

$$(\bar{Q}^*1) \quad \begin{array}{l} G_{\mathfrak{A}}'y = G_{\mathfrak{A}}'A_b\,X\beta + G_{\mathfrak{A}}'A_{\bar{b}}X(\beta+\delta)+G_{\mathfrak{A}}'u \;^{1)} \\ E(G_{\mathfrak{A}}'u)=o,\; E(G_{\mathfrak{A}}'uu'G_{\mathfrak{A}})=\sigma^2\, G_{\mathfrak{A}}'G_{\mathfrak{A}} \;; \\ \beta,\delta \in \mathbb{R}^n,\; o<\sigma^2<\infty \;;\; u \text{ normalverteilt} \end{array}$$

zu testen. Sind jedoch auch die Variablen

$$\sum_{i\in\mathfrak{J}(a_k,b)} y_i\,,\quad \sum_{i\in\mathfrak{J}(a_k,\bar{b})} y_i \qquad k=1,2,\ldots,S$$

---

1) $G_{\mathfrak{A}}$ ist wiederum die oben definierte Gruppierungsmatrix, die Matrizen A_b und $A_{\bar{b}}$ sind ebenfalls oben definierte Auswahlmatrizen. (Vgl. Abschnitt 2.2.)

beobachtet worden, kann das Modell

$$G_{\sigma_1}'A_b y = G_{\sigma_1}'A_b X\beta + G_{\sigma_1}'A_b\, u$$

$$G_{\sigma_1}'A_{\bar{b}} y = G_{\sigma_1}'A_{\bar{b}} X(\beta+\delta) + G_{\sigma_1}'A_{\bar{b}} u$$

$$(\bar{Q}^{*}2)\quad E\begin{pmatrix} G_{\sigma_1}'A_b \\ G_{\sigma_1}'A_{\bar{b}} \end{pmatrix} u = o;\quad E\begin{pmatrix} G_{\sigma_1}'A_b \\ G_{\sigma_1}'A_{\bar{b}} \end{pmatrix} uu'(A_b G_{\sigma_1}, A_{\bar{b}} G_{\sigma_1}) = \sigma^2 \begin{pmatrix} G_{\sigma_1}'A_b G_{\sigma_1}, o \\ o, G_{\sigma_1}'A_{\bar{b}} G_{\sigma_1} \end{pmatrix}$$

$\beta,\delta \in \mathbb{R}^n$, $o<\sigma^2<\infty$; u normalverteilt.

dem Test zugrunde gelegt werden.

Sei zuerst der Test für das Modell $(\bar{Q}^{*}1)$ entwickelt. Von

$$\hat{u} = G_{\sigma_1}'y - G_{\sigma_1}'X\hat{\beta} - G_{\sigma_1}'A_{\bar{b}}\, X\hat{\delta}$$

mit

$$\begin{pmatrix} \hat{\delta} \\ \hat{\beta} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X'A_{\bar{b}}P_{\sigma_1}A_{\bar{b}}X, & X'A_{\bar{b}}P_{\sigma_1}X \\ X'P_{\sigma_1}A_{\bar{b}}X & X'P_{\sigma_1}X \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} X'A_{\bar{b}}P_{\sigma_1}y \\ X'P_{\sigma_1}y \end{pmatrix}$$

sowie

$$\hat{\hat{u}} = G_{\sigma_1}'y - G_{\sigma_1}'X\hat{\hat{\beta}}$$

mit

$$\hat{\hat{\beta}} = (X'P_{\sigma_1}X)^{-1}X'P_{\sigma_1}y$$

ausgehend, ergibt sich sowohl

$$\frac{1}{\sigma^2}\,\hat{u}'(G_{\sigma_1}'G_{\sigma_1})^{-1}\hat{u} = \frac{1}{\sigma^2}\{u'\{P_{\sigma_1} - P_{\sigma_1}X(X'P_{\sigma_1}X)^{-1}X'P_{\sigma_1}\}u$$

$$-u'\{P_{\sigma_1} - P_{\sigma_1}X(X'P_{\sigma_1}X)^{-1}X'P_{\sigma_1}\}A_{\bar{b}}X\{X'A_{\bar{b}}\{P_{\sigma_1} - P_{\sigma_1}X(X'P_{\sigma_1}X)^{-1}X'P_{\sigma_1}\}A_{\bar{b}}X\}^{-1} *$$

$$X'A_{\bar{b}}\{P_{\sigma_1} - P_{\sigma_1}X(X'P_{\sigma_1}X)^{-1}X'P_{\sigma_1}\}u\} \sim \chi^2_{S-2n}$$

als auch

$$\frac{1}{\sigma^2}\,\hat{\hat{u}}'(G_{\sigma_1}'G_{\sigma_1})^{-1}\hat{\hat{u}} = \frac{1}{\sigma^2}\{u'\{P_{\sigma_1} - P_{\sigma_1}X(X'P_{\sigma_1}X)^{-1}X'P_{\sigma_1}\}u +$$

$$2u'\{P_{\sigma_1} - P_{\sigma_1}X(X'P_{\sigma_1}X)^{-1}X'P_{\sigma_1}\}A_{\bar{b}}X\delta + \delta'X'A_{\bar{b}}\{P_{\sigma_1} - P_{\sigma_1}X(X'P_{\sigma_1}X)^{-1}X'P_{\sigma_1}\}A_{\bar{b}}X\delta\} \sim \chi^2_{S-n,\lambda}$$

wobei

$$\lambda=\frac{1}{\sigma^2}\,\delta'X'A_{\bar{b}}\{P_{\sigma_1}-P_{\sigma_1}X(X'P_{\sigma_1}X)^{-1}X'P_{\sigma_1}\}A_{\bar{b}}X\delta$$

ist. Wegen

$$\{P_{\sigma_1}-P_{\sigma_1}X(X'P_{\sigma_1}X)^{-1}X'P_{\sigma_1}\}A_{\bar{b}}X\{X'A_{\bar{b}}\{P_{\sigma_1}-P_{\sigma_1}X(X'P_{\sigma_1}X)^{-1}X'P_{\sigma_1}\}A_{\bar{b}}X\}^{-1}*$$

$$X'A_{\bar{b}}\{P_{\sigma_1}-P_{\sigma_1}X(X'P_{\sigma_1}X)^{-1}X'P_{\sigma_1}\}*\{P_{\sigma_1}-P_{\sigma_1}X(X'P_{\sigma_1}X)^{-1}X'P_{\sigma_1}\}A_{\bar{b}}X\delta$$

$$=\{P_{\sigma_1}-P_{\sigma_1}X(X'P_{\sigma_1}X)^{-1}X'P_{\sigma_1}\}A_{\bar{b}}X\delta$$

muß schließlich

$$\frac{1}{\sigma^2}\{\hat{\hat{u}}'(G_{\sigma_1}'G_{\sigma_1})^{-1}\hat{\hat{u}}-\hat{u}'(G_{\sigma_1}'G_{\sigma_1})^{-1}\hat{u}\}\sim\chi^2_{n,\lambda}$$

gelten, so daß zusammenfassend festgehalten werden kann, daß die Variable

$$\frac{\frac{1}{n}\{\hat{\hat{u}}'(G_{\sigma_1}'G_{\sigma_1})^{-1}\hat{\hat{u}}-\hat{u}'(G_{\sigma_1}'G_{\sigma_1})^{-1}\hat{u}\}}{\frac{1}{S-2n}\;\hat{u}'(G_{\sigma_1}'G_{\sigma_1})^{-1}\hat{u}}$$

für $\delta\neq o$ einer nicht zentralen F-Verteilung, für $\delta=o$ einer zentralen F-Verteilung mit n Zähler- und S-2n Nennerfreiheitsgraden folgt, denn die Unabhängigkeit der beiden χ^2-Variablen kann unmittelbar eingesehen werden. Somit ist diese Variable für einen Test der Hypothese

$$H_o:\ \delta=o$$

geeignet.

Ein vergleichsweise mächtigerer Test läßt sich, wie nicht anders zu erwarten, im Rahmen des Modells ($\bar{Q}^*.2$) entwickeln. Sei

$$\hat{u}_1 = G_{\sigma_1}'A_b y - G_{\sigma_1}'A_b X\hat{\beta}$$

$$\hat{u}_2 = G_{\sigma_1}'A_{\bar{b}} y - G_{\sigma_1}'A_{\bar{b}} X(\hat{\beta}+\hat{\delta})$$

mit [1]

$$\hat{\beta}=\{X'A_bG_{\sigma_1}(G_{\sigma_1}'A_bG_{\sigma_1})^{-1}G_{\sigma_1}'A_bX\}^{-1}X'A_bG_{\sigma}\{G_{\sigma_1}'A_bG_{\sigma_1})^{-1}G_{\sigma_1}'A_b\ y$$

$$=\{X'P_{\sigma_1/b}X\}^{-1}X'P_{\sigma_1/b}y$$

---

1) Es sei $P_{\sigma/b} = A_bG_{\sigma}(G_{\sigma}'A_bG_{\sigma})^{-1}G_{\sigma}'A_b$ und gelte $rg\ G_{\sigma}'A_bG_{\sigma} = rg\ G_{\sigma}'A_{\bar{b}}G_{\sigma} = n$, also $h(a_k,b)\neq 0$, $h(a_k,\bar{b})\neq 0$ für alle k.

und

$$\hat{\delta}=\{X'P_{\sigma_1/\bar{b}}X\}^{-1}X'P_{\sigma_1/\bar{b}}y - \{X'P_{\sigma_1/b}X\}^{-1}X'P_{\sigma_1/b}y$$

so ergibt sich über

$$\hat{u}_1=\{G_{\sigma_1}'A_b-G_{\sigma_1}'A_bX\{X'P_{\sigma_1/b}X\}^{-1}X'P_{\sigma_1/b}\}u$$

$$\hat{u}_2=\{G_{\sigma_1}'A_{\bar{b}}-G_{\sigma_1}'A_{\bar{b}}X\{X'P_{\sigma_1/\bar{b}}X\}^{-1}X'P_{\sigma_1/\bar{b}}\}u$$

schließlich wegen $P_{\sigma_1/b}\ P_{\sigma_1/\bar{b}} = o$

$$\frac{1}{\sigma^2}\{\hat{u}_1'(G_{\sigma_1}'A_bG_{\sigma_1})^{-1}\hat{u}_1+\hat{u}_2'(G_{\sigma_1}'A_{\bar{b}}\ G_{\sigma_1})\hat{u}_2\}$$

$$= \frac{1}{\sigma^2}u'\{\{P_{\sigma_1/b}-P_{\sigma_1/b}X(X'P_{\sigma_1/b}X)^{-1}X'P_{\sigma_1/b}\}+\{P_{\sigma_1/\bar{b}}-P_{\sigma_1/\bar{b}}X(X'P_{\sigma_1/\bar{b}}X)^{-1}X'P_{\sigma_1/\bar{b}}\}\}u$$

$$\sim\chi^2_{2(s-n)}$$

Entsprechend ergibt sich, von

$$\hat{\hat{u}}_1=G_{\sigma_1}'A_by - G_{\sigma_1}'A_bX\hat{\beta}$$

$$\hat{\hat{u}}_2=G_{\sigma_1}'A_{\bar{b}}y - G_{\sigma_1}'A_{\bar{b}}X\hat{\beta}$$

und

$$\hat{\beta}=\{X'(P_{\sigma_1/b}+P_{\sigma_1/\bar{b}})X\}^{-1}X'(P_{\sigma_1/b}+P_{\sigma_1/\bar{b}})y$$

ausgehend,

$$\hat{\hat{u}}_1=G_{\sigma_1}'A_b\{I-X\{X'(P_{\sigma_1/b}+P_{\sigma_1/\bar{b}})X\}^{-1}X'(P_{\sigma_1/b}+P_{\sigma_1/\bar{b}})\}u$$

$$-G_{\sigma_1}'A_bX\{X'(P_{\sigma_1/b}+P_{\sigma_1/\bar{b}})X\}^{-1}X'P_{\sigma_1/\bar{b}}X\delta$$

$$\hat{\hat{u}}_2=G_{\sigma_1}'A_{\bar{b}}\{I-X\{X'(P_{\sigma_1/b}+P_{\sigma_1/\bar{b}})X\}^{-1}X'(P_{\sigma_1/b}+P_{\sigma_1/\bar{b}})\}u$$

$$+G_{\sigma_1}'A_{\bar{b}}\{I-X\{X'(P_{\sigma_1/b}+P_{\sigma_1/\bar{b}})X\}^{-1}X'P_{\sigma_1/\bar{b}}\}X\delta$$

Darauf aufbauend ist sowohl

$$\hat{\hat{u}}_1'(G_{\sigma_1}'A_bG_{\sigma_1})^{-1}\hat{\hat{u}}_1 =$$

$$u'\{I-(P_{\sigma_1/b}+P_{\sigma_1/\bar{b}})X\{X'(P_{\sigma_1/b}+P_{\sigma_1/\bar{b}})X\}^{-1}P_{\sigma_1/b}\{I-X\{X'(P_{\sigma_1/b}+P_{\sigma_1/\bar{b}})X\}^{-1}X'(P_{\sigma_1/b}+P_{\sigma_1/\bar{b}})\}u$$

$$-2u'\{I-(P_{\sigma_1/b}+P_{\sigma_1/\bar{b}})X\{X'(P_{\sigma_1/b}+P_{\sigma_1/\bar{b}})X\}^{-1}X'\}P_{\sigma_1/b}X\{X'(P_{\sigma_1/b}+P_{\sigma_1/\bar{b}})X\}^{-1}X'P_{\sigma_1/\bar{b}}X\delta$$

$$+\delta'X'P_{\sigma_1/\bar{b}}X\{X'(P_{\sigma_1/b}+P_{\sigma_1/\bar{b}})X\}^{-1}X'P_{\sigma_1/b}X\{X'(P_{\sigma_1/b}+P_{\sigma_1/\bar{b}})X\}^{-1}X'P_{\sigma_1/\bar{b}}X\delta$$

als auch

$$\hat{\hat{u}}_2'(G_{\sigma_1}'A_{\bar{b}}G_{\sigma_1})^{-1}\hat{\hat{u}}_2 =$$

$$u'\{I-(P_{\sigma_1/b}+P_{\sigma_1/\bar{b}})X\{X'(P_{\sigma_1/b}+P_{\sigma_1/\bar{b}})X\}^{-1}X'\}P_{\sigma_1/\bar{b}}\{I-X\{X'P_{\sigma_1/b}+P_{\sigma_1/\bar{b}}X\}^{-1}X'(P_{\sigma_1/b}+P_{\sigma_1/b})\}u$$

$$+2u'\{I-(P_{\sigma_1/b}+P_{\sigma_1/\bar{b}})X\{X'(P_{\sigma_1/b}+P_{\sigma_1/\bar{b}})X\}^{-1}X'\}P_{\sigma_1/\bar{b}}\{I-X\{X'(P_{\sigma_1/b}+P_{\sigma_1/\bar{b}})X\}^{-1}X'P_{\sigma_1/\bar{b}}\}X\delta$$

$$+\delta'X'\{I-P_{\sigma_1/\bar{b}}X\{X'(P_{\sigma_1/b}+P_{\sigma_1/\bar{b}})X\}^{-1}X'\}P_{\sigma_1/\bar{b}}\{I-X\{X'(P_{\sigma_1/b}+P_{\sigma_1/\bar{b}})X\}^{-1}X'P_{\sigma_1/\bar{b}}\}X\delta$$

zu zeigen. Somit läßt sich über

$$\hat{\hat{u}}_1'(G_{\sigma_1}'A_bG_{\sigma_1})\hat{\hat{u}}_1+\hat{\hat{u}}_2'(G_{\sigma_1}'A_{\bar{b}}G_{\sigma_1})^{-1}\hat{u}_2 =$$

$$u'\{(P_{\sigma_1/b}+P_{\sigma_1/\bar{b}})-(P_{\sigma_1/b}+P_{\sigma_1/\bar{b}})X\{X'(P_{\sigma_1/b}+P_{\sigma_1/\bar{b}})X\}^{-1}X'(P_{\sigma_1/b}+P_{\sigma_1/\bar{b}})\}\ u$$

$$+2u'\{I-(P_{\sigma_1/b}+P_{\sigma_1/\bar{b}})X\{X'(P_{\sigma_1/b}+P_{\sigma_1/\bar{b}})X\}^{-1}X'\}P_{\sigma_1/\bar{b}}\ X\delta$$

$$+\delta'X'\{P_{\sigma_1/\bar{b}}-P_{\sigma_1/\bar{b}}X\{X'(P_{\sigma_1/b}+P_{\sigma_1/\bar{b}})X\}^{-1}X'P_{\sigma_1/\bar{b}}\}X\delta$$

zusammenfassend festhalten, daß

$$\frac{1}{\sigma^2}\{\hat{\hat{u}}_1'(G_{\sigma_1}'A_bG_{\sigma_1})^{-1}\hat{\hat{u}}_1+\hat{\hat{u}}_2'(G_{\sigma_1}'A_{\bar{b}}G_{\sigma_1})^{-1}\hat{\hat{u}}_2-\hat{u}_1'(G_{\sigma_1}'A_bG_{\sigma_1})^{-1}\hat{u}_1-\hat{u}_2'(G_{\sigma_1}'A_{\bar{b}}G_{\sigma_1})^{-1}\hat{u}_2\} =$$

$$\frac{1}{\sigma^2}\Big[u'\{P_{\sigma_1/b}X(X'P_{\sigma_1/b}X)^{-1}X'P_{\sigma_1/b}+P_{\sigma_1/\bar{b}}X(X'P_{\sigma_1/\bar{b}}X)^{-1}X'P_{\sigma_1/\bar{b}}$$

$$-(P_{\sigma_1/b}+P_{\sigma_1/\bar{b}})X\{X'(P_{\sigma_1/b}+P_{\sigma_1/\bar{b}})X\}^{-1}X'(P_{\sigma_1/b}+P_{\sigma_1/\bar{b}})\}\ u$$

$$+2u'\{I-(P_{\sigma_1/b}+P_{\sigma_1/\bar{b}})X\{X'(P_{\sigma_1/b}+P_{\sigma_1/\bar{b}})X\}^{-1}X'\}P_{\sigma_1/\bar{b}}X\delta$$

$$+\delta'X'\{P_{\sigma_1/\bar{b}}-P_{\sigma_1/\bar{b}}X\{X'(P_{\sigma_1/b}+P_{\sigma_1/\bar{b}})X\}^{-1}X'P_{\sigma_1/\bar{b}}\}X\delta\Big]\ \sim\ \chi^2_{n,\mu}$$

mit

$$\mu=\frac{1}{\sigma^2}\delta'X'\{P_{\sigma_1/\bar{b}}-P_{\sigma_1/\bar{b}}X(X'(P_{\sigma_1/b}+P_{\sigma_1/\bar{b}})X\}^{-1}X'P_{\sigma_1/\bar{b}}\}X\delta$$

denn die Matrix

$$P_{\sigma_1/b}X(X'P_{\sigma_1/b}X)^{-1}X'P_{\sigma_1/b}+P_{\sigma_1/\bar{b}}X(X'P_{\sigma_1/\bar{b}}X)^{-1}X'P_{\sigma_1/\bar{b}}-(P_{\sigma_1/b}+P_{\sigma_1/\bar{b}})X\{X'(P_{\sigma_1/b}+P_{\sigma_1/\bar{b}})X\}^{-1}$$

$$X'(P_{\sigma_1/b}+P_{\sigma_1/\bar{b}})=:P_\delta$$

ist idempotent und symmetrisch und es gilt

$$P_\delta\{I-(P_{\sigma_1/b}+P_{\sigma_1/\bar{b}})X\{X'(P_{\sigma_1/b}+P_{\sigma_1/\bar{b}})X\}^{-1}X'\}P_{\sigma_1/\bar{b}}X\delta =$$

$$\{I-(P_{\sigma_1/b}+P_{\sigma_1/\bar{b}})X\{X'(P_{\sigma_1/b}+P_{\sigma_1/\bar{b}})X\}^{-1}X'\}P_{\sigma_1/\bar{b}}X\delta.$$

Die Variable

$$\frac{\frac{1}{n}\{\hat{u}_1'(G_{\sigma_1}'A_b G_{\sigma_1})\hat{u}_1+\hat{u}_2'(G_{\sigma_1}'A_{\bar{b}}\ G_{\sigma_1})^{-1}\hat{u}_2-\hat{u}_1'(G_{\sigma_1}'A_b G_{\sigma_1})^{-1}\hat{u}_1-\hat{u}_2'(G_{\sigma_1}'A_{\bar{b}}G_{\sigma_1})^{-1}\hat{u}_2\}}{\frac{1}{2(S-n)}\quad\{\hat{u}_1'(G_{\sigma_1}'A_b G_{\sigma_1})^{-1}\hat{u}_1+\hat{u}_2'(G_{\sigma_1}'A_{\bar{b}}G_{\sigma_1})^{-1}\hat{u}_2\}}$$

folgt, da auch in diesem Fall Unabhängigkeit zwischen den χ-Variablen des Zählers und Nenners besteht, einer zentralen bzw. nicht zentralen F-Verteilung mit n und 2(S-n) Freiheitsgraden.

Behauptet wurde nun eingangs, daß einem auf dieser Variablen aufgebauten Test eine größere Macht als dem zuerst entwickelten Test zukommt. Dies kann jedoch nicht allein aus

$$2(S-n) > S-2n$$

gefolgert werden, vielmehr muß zusätzlich noch

$$\lambda \leq \mu \quad \forall\, \delta \in \mathbb{R}^n$$

gelten.[1] Wegen

$$\{P_{\sigma_1/b}+P_{\sigma_1/\bar{b}}\}P_{\sigma_1}=A_b P_{\sigma_1}+A_{\bar{b}}P_{\sigma_1}=(A_b+A_{\bar{b}})P_{\sigma_1}=P_{\sigma_1}$$

gilt

$$\sigma^2(\mu-\lambda)=\delta'X'P_{\sigma_1/\bar{b}}\Big[\{I-(P_{\sigma_1/b}+P_{\sigma_1/\bar{b}})X\{X'(P_{\sigma_1/b}+P_{\sigma_1/\bar{b}})X\}^{-1}X'(P_{\sigma_1/b}+P_{\sigma_1/\bar{b}})\}$$
$$-\{P_{\sigma_1}-P_{\sigma_1}X(X'P_{\sigma_1}X)^{-1}X'P_{\sigma_1}\}\Big]P_{\sigma_1/\bar{b}}\ X\,\delta.$$

Nun ist ferner

$$\{I-(P_{\sigma_1/b}+P_{\sigma_1/\bar{b}})X\{X'(P_{\sigma_1/b}+P_{\sigma_1/\bar{b}})X\}^{-1}X'(P_{\sigma_1/b}+P_{\sigma_1/\bar{b}})\}\{P_{\sigma_1}-P_{\sigma_1}X(X'P_{\sigma_1}X)^{-1}X'P_{\sigma_1}$$
$$=P_{\sigma_1}-P_{\sigma_1}X(X'P_{\sigma_1}X)^{-1}X'P_{\sigma_1},$$

so daß die Differenz dieser beiden idempotenten Matrizen ebenfalls idempotent ist und somit die Behauptung bewiesen ist.

---

1) vgl. G.A.F. Seber (1966) Kapitel 5, Abschnitt 5.1

3.3.2 Allgemeiner Test [1]

Die Identifizierbarkeit der E-Struktur des ursprünglichen Modells im aggregierten Modell vorausgesetzt, kann meistens eine im Rahmen des ursprünglichen Modells zu testende konsistente lineare Hypothese

$$\mathcal{H}: R\beta = r \quad [2]$$

auch im Rahmen des aggregierten Modells gegen die Hypothese

$$\bar{\mathcal{H}}: R\beta \neq r$$

getestet werden, denn durch die Identifizierbarkeit wird sichergestellt, daß alle linearen Funktionen $c'\beta$ im aggregierten Modell schätzbar sind.

Sei zuerst das sich aus dem Modell (M^*) [3] ergebende Modell $(\bar{M}^*)$ zugrunde gelegt. Sei nun

$$\check{u} = G'y - G'X\check{\beta}$$

und

$$\check{\beta} = (X'P_GX)^{-1}X'P_Gy$$

so ergibt sich daraus zum einen

$$\frac{1}{\sigma^2}\check{u}'(G'G)^+\check{u} = \frac{1}{\sigma^2}u'\{P_G - P_GX(X'P_GX)^{-1}X'P_G\}u \sim \chi^2_{rgG-n}$$

Da unter diesen Voraussetzungen $R\check{\beta}-r$ einer Normalverteilung mit

$$E(R\check{\beta}-r) = R\beta - r, \quad V(R\check{\beta}-r) = \sigma^2 R(X'P_GX)^{-1}R'$$

folgt, ergibt sich zum anderen

$$\frac{1}{\sigma^2}\{R\check{\beta}-r\}'\{R(X'P_GX)^{-1}R'\}^+\{R\check{\beta}-r\} \sim \chi^2_{rgR,\lambda}$$

$$\lambda = \frac{1}{\sigma^2}(R\beta-r)'\{R(X'P_GX)^{-1}R'\}^+(R\beta-r).$$

---

1) vgl. zu diesem Abschnitt insbesondere C.R.Rao und S.K. Mitra (1971), Kapitel 7,8,9.

2) Mit R sei eine vorgegebene mxn Matrix und mit r ein ebenfalls vorgegebener mx1 Vektor bezeichnet.

3) Durch das Symbol * sind die um die a priori Hypothese normalverteilter Störvariabler erweiterten Modelle gekennzeichnet.

Wegen

$$P_G X(X'P_G X)^{-1}R'\{R(X'P_G X)^{-1}R'\}^{+}R(X'P_G X)^{-1}X'P_G\{P_G - P_G X(X'P_G X)^{-1}X'P_G\}=o$$

sind schließlich die beiden χ^2-Variablen unabhängig, so daß die Variable

$$(T.1)\quad \bar{F} = \frac{\frac{1}{rg\ R}\{R\check{\beta}-r\}'\{R(X'P_G X)^{-1}R'\}^{+}\{R\check{\beta}-r\}}{\frac{1}{rgG-n}\ \check{u}'(G'G)^{+}\check{u}}$$

F-verteilt ist mit rg R Zähler- und (rg G-n) Nennerfreiheitsgraden sowie der Nicht-Zentralität λ.

Um diese Variable nun als Testvariable für die Hypothese verwenden zu können, muß gewährleistet sein, daß aus $R\beta\neq r$ stets $\lambda\neq o$ folgt. Auf die Konsistenz der Hypothese, also auf

$$RR^{+}r=r$$

zurückgreifend, ist wegen

$$\lambda=o \Rightarrow \{R(X'P_G X)^{-1}R'\}^{+}\{R\beta-r\}=o \Rightarrow$$

$$\{R(X'P_G X)^{-1}R'\}^{+}R\{\beta-R^{+}r\}=o \Rightarrow$$

$$\{R(X'P_G X)^{-1}R'\}\{R(X'P_G X)^{-1}R'\}^{+}R\{\beta-R^{+}r\}=o \Rightarrow$$

$$R\beta-RR^{+}r = o \Rightarrow R\beta-r=o$$

die Eignung der Variablen $\bar{F}$ aber nachzuweisen.

Sei nun die Hypothese $\mathcal{H}$ im Rahmen des Modells $(\bar{M}^{*'})$ zu testen, so ist unmittelbar einzusehen, daß dazu, auf

$$\check{u} = G'y - G'X\check{\beta}$$

und

$$\check{\beta} = \{X'G(G'\Sigma G)^{+}G'X\}^{-1}X'G(G'\Sigma G)^{+}G'y$$

aufbauend, die ebenfalls einer F-Verteilung mit rg R und (rg G-n) Freiheitsgraden folgende Variable

$$(\bar{T}.'1)\ \bar{F}' = \frac{\frac{1}{rg\ R}\{R\check{\beta}-r\}'\{R(X'G(G'\Sigma G)^{+}G'X)^{-1}R'\}^{+}\{R\check{\beta}-r\}}{\frac{1}{rgG-n}\ \check{u}'(G'\Sigma G)^{+}\check{u}}$$

heranzuziehen ist. Zu beachten ist dabei jedoch, daß sich hier als Nicht-Zentralität

$$\lambda' = \frac{1}{\sigma^2}\{R\beta - r\}'\{R(X'G(G'\Sigma G)^{+}G'X)^{-1}R'\}^{+}\{R\beta - r\}$$

ergibt.

Sei schließlich das Modell ($\bar{M}^{*}$") dem Test der Hypothese zugrunde zu legen. Um die sich dabei ergebenden Schwierigkeiten aufzuzeigen, sei vereinfachend angenommen, daß nicht nur

$$P_G\Omega_i = \Omega_i P_G \quad \forall i \in \mathfrak{J}$$

sondern auch

$$P_G X(X'P_G X)^{-1}X'P_G\Omega_i = \Omega_i P_G X(X'P_G X)^{-1}X'P_G \quad \forall i \in \mathfrak{J}$$

gilt, denn dadurch ist, von

$$\{X'G\{\sum_i \omega_i^2 G'\Omega_i G\}^{+}G'X\}^{-1} = \{X'G\{\sum_i \omega_i^{-2}(G'G)^{+}G'\Omega_i G(G'G)^{+}\}G'X\}^{-1} =$$

$$\{\sum_i \omega_i^{-2}X'P_G\Omega_i P_G X\}^{-1} = \sum_i \omega_i^2 (X'P_G X)^{-1}X'P_G\Omega_i P_G X(X'P_G X)^{-1}$$

und

$$X'G\{\sum_i \omega_i^2 G'\Omega_i G\}^{+}G'y = \sum_i \omega_i^{-2}X'P_G\Omega_i P_G y$$

ausgehend, wegen

$$\{X'G\{\sum_i \omega_i^2 G'\Omega_i G\}^{+}G'X\}^{-1}X'G\{\sum_i \omega_i^2 G'\Omega_i G\}^{+}G'y =$$

$$\sum_i \sum_j \omega_i^2\omega_j^{-2}(X'P_G X)^{-1}X'P_G\Omega_i P_G X(X'P_G X)^{-1}X'P_G\Omega_j P_G y = (X'P_G X)^{-1}X'P_G y$$

die Effizienz der Schätzung ($\bar{S}.1$) gesichert. Nun gilt zwar nicht nur

$$\{\check{R\beta} - r\}'\{\sum_i \omega_i^2 R(X'P_G X)^{-1}X'P_G\Omega_i P_G X(X'P_G X)^{-1}R'\}^{+}\{\check{R\beta} - r\} = \chi^2_{rg\ R,\lambda''}$$

$$\lambda'' = \{R\beta - r\}'\{\sum_i \omega_i^2 R(X'P_G X)^{-1}X'P_G\Omega_i P_G X(X'P_G X)^{-1}R'\}^{+}\{R\beta - r\}$$

sondern auch

$$\check{u}'\{\sum_i \omega_i^2 G'\Omega_i G\}^{+}\check{u} = \chi^2_{rg\ G-n}$$

wobei

$$\check{u} = G'y - G'X\check{\beta} = G'\{I - X(X'P_G X)^{-1}X'P_G\}u$$

Zudem sind diese χ^2-Variablen wegen

$$P_G X(X'P_G X)^{-1}R'\{\Sigma\omega_i{}^2 R(X'P_G X)^{-1}X'P_G\Omega_i P_G X(X'P_G X)^{-1}R'\}^{+}R(X'P_G X)^{-1}X'P_G \;*$$

$$\{\Sigma\omega_i{}^2\Omega_i\}\{\Sigma\omega_i{}^{-2}P_G\Omega_i P_G - P_G X(X'P_G X)^{-1}X'\{\Sigma\omega_i{}^{-2}P_G\Omega_i P_G\}X(X'P_G X)^{-1}X'P_G\}=o$$

auch unabhängig, so daß der Quotient der durch die jeweiligen Freiheitsgrade dividierten χ^2-Variablen wieder der F-Verteilung mit rg R Zähler- und (rg G-n) Nennerfreiheitsgraden sowie der Nicht-Zentralität λ" folgt. Ein Test ist auf diesem Quotienten jedoch nicht aufzubauen, da dazu nicht nur die Daten $(\bar{y},\bar{X})$ heranzuziehen sind, sondern neben den Matrizen $G'\Omega_i G$ vor allem auch die Parameter $\omega_i{}^2$ bekannt sein müssen. Zur Konstruktion eines Hypothesentests ist somit ein anderer Weg einzuschlagen.[1)]

Sei dazu auf die zur Schätzung der Varianzkomponenten gebildeten und durch ein Aufbrechen des Modells ($\bar{M}$") entstandenen Modelle ($\bar{M}"_{(k)}$) zurückgekommen. Gibt es nun ein Modell ($\bar{M}^{*}"_{(k)}$), für das

$$R'=\{X'\Omega_k P_G\}\{X'\Omega_k P_G\}^{+}R'$$

$$=\{X'\Omega_k P_G\Omega_k X\}\{X'\Omega_k P_G\Omega_k X\}^{+}R'$$

gilt,[2)] so ist die Hypothese $\mathcal{H}$ im Rahmen dieses Teilmodells testbar, weil dann mit $R'=(r_1,\ldots,r_m)$ alle linearen Funktionen $r_j'\beta$ schätzbar sind. Offensichtlich ist, auf

$$\check{\beta}_{(k)}=\{X'\Omega_k P_G\Omega_k X\}^{+}X'\Omega_k P_G\Omega_k y$$

und

$$\check{u}_{(k)}=G'\Omega_k y-G'\Omega_k X\check{\beta}_{(k)}=G'\Omega_k\{I-X\{X'\Omega_k P_G\Omega_k X\}^{+}X'\Omega_k P_G\Omega_k\}\,u$$

zurückgreifend, durch die Variable

$$(\bar{F}".1)\quad \bar{F}"_{(k)}=\frac{\frac{1}{rg\,R}\{R\check{\beta}_{(k)}-r\}'\{R(X'\Omega_k P_G\Omega_k X)^{+}R'\}^{+}\{R\check{\beta}_{(k)}-r\}}{\frac{1}{rg\,G'\Omega_k-rg\,G'\Omega_k X}\;\check{u}_{(k)}'(G'G)^{+}\check{u}_{(k)}}$$

---

1) Man vergegenwärtige sich, daß im Rahmen dieses Modells weder $\{R\check{\beta}-r\}'\{R(X'P_G X)^{-1}R'\}^{+}\{R\check{\beta}-r\}$ noch $\check{u}'(G'G)^{+}\check{u}$ einer χ^2-Verteilung folgen, also auch auf diese Variablen nicht zurückgegriffen werden kann.

2) Man beachte in diesem Zusammenhang, daß durch die Identifizierbarkeit der E-Struktur des ursprünglichen Modells im aggregierten Modell nicht sichergestellt ist, daß eine im Rahmen des ursprünglichen Modells zu testende Hypothese auc im aggregierten Modell zu testen ist, denn aus rg G'X=rg X und $R'=\{X'\Omega_k X\}\{X'\Omega_k X\}^{+}R'$ folgt nicht, daß auch $R'=\{X'\Omega_k P_G\Omega_k X\}\{X'\Omega_k P_G\Omega_k X\}^{+}R'$ gilt.

ein Test der Hypothese δ möglich, denn diese Variable folgt einer F-Verteilung mit rg R Zähler- und (rg G'Ω_k-rg G'Ω_kX) Nennerfreiheitsgraden und ist durch eine Nicht-Zentralität

$$\lambda''_{(k)}=\frac{1}{\omega_k^2}\{R\beta-r\}'\{R(X'\Omega_k P_G \Omega_k X)^{+}R'\}^{+}\{R\beta-r\}$$

gekennzeichnet. So ist durch

$$R\check{\beta}_{(k)}-r=R\{X'\Omega_k P_G \Omega_k X\}^{+}X'\Omega_k P_G \Omega_k X\beta-r+R\{X'\Omega_k P_G \Omega_k X\}^{+}X'\Omega_k P_G \Omega_k u$$

$$=R\beta-r+R\{X'\Omega_k P_G \Omega_k X\}^{+}X'\Omega_k P_G \Omega_k u$$

und die Idempotenz der Matrix

$$\{\Sigma\omega_i^2\Omega_i\}\frac{1}{\omega_k^2}\Omega_k P_G \Omega_k X\{X'\Omega_k P_G \Omega_k X\}^{+}R'\{R(X'\Omega_k P_G \Omega_k X)^{+}R'\}^{+}R\{X'\Omega_k P_G \Omega_k X\}^{+}X'\Omega_k P_G \Omega_k =$$

$$\Omega_k P_G \Omega_k X\{X'\Omega_k P_G \Omega_k X\}^{+}R'\{R(X'\Omega_k P_G \Omega_k X)^{+}R'\}^{+}R\{X'\Omega_k P_G \Omega_k X\}^{+}X'\Omega_k P_G \Omega_k$$

zu zeigen, daß

$$\frac{1}{\omega_k^2}\{R\check{\beta}_{(k)}-r\}'\{R(X'\Omega_k PG\Omega_k X)^{+}R'\}^{+}\{R\check{\beta}_{(k)}-r\}\sim\chi^2_{rgR,\lambda''_{(k)}}$$

gilt, wobei wegen

$$\lambda''_{(k)}=o\Rightarrow\{R(X'\Omega_k P_G \Omega_k X)^{+}R'\}^{+}R(\beta-R^{+}r)=o\Rightarrow$$

$$\{R(X'\Omega_k P_G \Omega_k X)^{+}R'\}\{R(X'\Omega_k P_G \Omega_k X)^{+}R'\}^{+}R(X'\Omega_k P_G \Omega_k X)^{+}X'\Omega_k P_G \Omega_k X(\beta-R^{+}r)=o \Leftrightarrow$$

$$R(\beta-R^{+}r)=o \Leftrightarrow R\beta-r=o$$

die Nicht-Zentralität nur mit $R\beta=r$ den Wert Null annimmt. Des weiteren ist wegen der Idempotenz der Matrix

$$\{\Sigma\omega_i^2\Omega_i\}\frac{1}{\omega_k^2}\{\Omega_k P_G \Omega_k-\Omega_k P_G \Omega_k X(X'\Omega_k P_G \Omega_k X)^{+}X'\Omega_k P_G \Omega_k\} =$$

$$\Omega_k P_G \Omega_k-\Omega_k P_G \Omega_k X\{X'\Omega_k P_G \Omega_k X\}^{+}X'\Omega_k P_G \Omega_k$$

nachgewiesen, daß

$$\frac{1}{\omega_k^2}\check{u}_{(k)}'(G'G)^{+}\check{u}_{(k)}=\frac{1}{\omega_k^2}u'\{\Omega_k P_G \Omega_k-\Omega_k P_G \Omega_k X(X'\Omega_k P_G \Omega_k X)^{+}X'\Omega_k P_G \Omega_k\}u$$

$$\sim\chi^2_{rgG'\Omega_k-rgG'\Omega_k X}$$

gilt. Schließlich ist durch

$$\Omega_k P_G \Omega_k X\{X'\Omega_k P_G \Omega_k X\}^{+} R'\{R(X'\Omega_k P_G \Omega_k X)^{+} R'\}^{+} R\{X'\Omega_k P_G \Omega_k X\}^{+} X'\Omega_k P_G \Omega_k \; *$$

$$\{\Sigma_i \omega_i^2 \Omega_i\}\{\Omega_k P_G \Omega_k - \Omega_k P_G \Omega_k X\{X'\Omega_k P_G \Omega_k X\}^{+} X'\Omega_k P_G \Omega_k\} = 0$$

die Unabhängigkeit der χ^2-Variablen gezeigt.

Nun ist aber darauf hinzuweisen, daß es zum einen möglicherweise kein Modell ($\bar{M}^{*"}_{(k)}$) gibt, das zu einem Test der Hypothese $\mathcal{H}$ heranzuziehen ist. In einem solchen Fall empfiehlt es sich, die Hypothese in zwei oder, sofern notwendig, mehrere dann in verschiedenen Modellen testbare Hypothesen zu zerlegen. Natürlich sind diese Hypothesen dann aber nicht gemeinsam sondern nur einzeln einem Test zu unterziehen. Zum anderen gibt es möglicherweise neben einem Modell ($\bar{M}^{*"}_{(k)}$) noch weitere Modelle ($\bar{M}^{*"}_{(l)}$),..., die zu einem solchen Test herangezogen werden können. Somit besteht natürlich auch die Möglichkeit, daß die Hypothese $\mathcal{H}$, mit den im Rahmen des Modells ($\bar{M}^{*"}_{(k)}$) heranzuziehenden Daten ($G'\Omega_k G(G'G)^{+}\bar{y}, G'\Omega_k G(G'G)^{+}\bar{X}$) konfrontiert, zu verwerfen und aufgrund der entsprechenden im Rahmen eines Modells ($\bar{M}^{*"}_{(l)}$) zu verwendenden Daten nicht zu verwerfen ist. Auf eine Diskussion möglicher Entscheidungsregeln, man denke etwa an eine Diskriminierung der Tests über die Zahl der Nennerfreiheitsgrade, wird jedoch verzichtet.

3.4. Test der V-Struktur

3.4.1 Beispiele

Im Rahmen des Varianzkomponentenmodells ($\bar{Z}^{*}$") ist insbesondere eine Oberprüfung der Hypothese

$$\mathcal{H}_0 : \sigma_v^2 = 0$$

von Interesse. Denn kann diese Hypothese verworfen werden, so ist eine Spezifikationsverschärfung, die von einem Äquikorrelationsmodell auf ein Standardmodell führt, aufgrund der dem Test zugrunde liegenden Daten nicht zu rechtfertigen.

Auf die oben abgeleiteten Schätzungen σ_w^2 und $\sigma_w^2+4\sigma_v^2$ zurückgreifend[1] läßt sich durch

$$\frac{\widehat{\sigma_w^2+4\sigma_v^2}}{\widehat{\sigma_w^2}} = \frac{\frac{1}{T_1+T_2-n}\sum_{t=1}^{T_1+T_2} 4\hat{u}(1)t^2}{\frac{1}{3T_2-(n-1)}\sum_{t=T_1+1}^{T_1+T_2} \hat{u}'(2)t\hat{u}(2)t}$$

eine Variable bestimmen, die bei Gültigkeit der Hypothese stets einer (zentralen) F-Verteilung mit (T_1+T_2-n) Zähler- und $(3T_2-(n-1))$ Nennerfreiheitsgraden folgt. Übersteigt nun der aufgrund der vorliegenden Daten zu bestimmende Wert dieser Variablen den Wert $F^{T_1+T_2-n}_{3T_2-(n-1);\alpha}$, wobei α die vorgegebene Irrtumswahrscheinlichkeit ist, kann die Hypothese verworfen werden, denn ein zweiseitiger Test kommt wegen der dem Modell ($\bar{Z}^{*}$") zugrunde liegenden a priori Hypothese $0<\sigma_v^2<\infty$ nicht in Betracht.

Abschließend sei zu diesem Test bemerkt, daß er stets, d.h. für alle σ_w^2 anzuwenden ist, daß die Macht des Tests aber entscheidend durch den den Daten zugrunde liegenden Parameter σ_w^2, genauer durch das Verhältnis σ_v^2/σ_w^2 bestimmt wird. Wegen

$$\lim_{\frac{\sigma_v^2}{\sigma_w^2}\to 0} P\left(\frac{\widehat{\sigma_w^2+4\sigma_v^2}}{\widehat{\sigma_w^2}} \leq F^{T_1+T_2-n}_{3T_2-(n-1);\alpha} \,|\, \mathcal{H}_0\right) = 1-\alpha$$

---

1) vgl. Abschnitt 3.2.1

kann unmittelbar eingesehen werden, daß die Macht dieses Tests sehr gering ist, wenn $\sigma_v^2 \ll \sigma_w^2$ gilt.

Des weiteren sind Tests auf Homoskedastizität, vor allem im Zusammenhang mit Strukturbruch- und Saisonstrukturtests im Rahmen von Zeitreihenmodellen oder Tests auf gruppenspezifische Strukturen im Rahmen von Querschnittsmodellen, von Bedeutung. So kann beispielsweise die Hypothese

$$\mathcal{H}: \delta = o$$

im Rahmen des Modells $(\bar{Q}^*2)$ nur dann durch die oben dargestellte Testvariable überprüft werden, wenn

$$E\left\{\begin{pmatrix} G_{\sigma_1}'A_b \\ G_{\sigma_1}'A_{\bar{b}} \end{pmatrix} uu'(A_bG_{\sigma_1}, A_{\bar{b}}G_{\sigma_1})\right\} = \sigma^2 \begin{Bmatrix} G_{\sigma_1}'A_bG_{\sigma_1}, & o \\ o & , G_{\sigma_1}'A_{\bar{b}}G_{\sigma_1} \end{Bmatrix}$$

gilt. Da nun aber auch der a priori Hypothese

$$E\left\{\begin{pmatrix} G_{\sigma_1}'A_b \\ G_{\sigma_1}'A_{\bar{b}} \end{pmatrix} uu'(A_bG_{\sigma_1}, A_{\bar{b}}G_{\sigma_1})\right\} = \sigma_b^2 \begin{pmatrix} G_{\sigma_1}'A_bG_{\sigma_1}, o \\ o \quad , o \end{pmatrix} + \sigma_{\bar{b}}^2 \begin{pmatrix} o, & o \\ o, & G_{\sigma_1}'A_{\bar{b}}G_{\sigma_1} \end{pmatrix} \quad 1)$$

eine vor allem im Hinblick auf die möglicherweise vorhandenen gruppenspezifischen E-Strukturen nicht von der Hand zu weisende Plausibilität zukommt, muß die Hypothese

$$\mathcal{H}: \sigma_b^2 = \sigma_{\bar{b}}^2$$

einem Test unterworfen werden. Daß dafür als Testvariable

$$\frac{\frac{1}{S-n}\hat{u}_1'(G_{\sigma_1}'A_bG_{\sigma_1})^{-1}\hat{u}_1}{\frac{1}{S-n}\hat{u}_2'(G'A_{\bar{b}}G)^{-1}\hat{u}_2} = \frac{\hat{\sigma}_b^2}{\hat{\sigma}_{\bar{b}}^2}$$

geeignet ist, kann, auf oben Gesagtes zurückgreifend,[2] unmittelbar eingesehen werden. Da diese Testvariable, sofern die Hypothese $\mathcal{H}$ gilt, einer F-Verteilung mit (S-n) Zähler- und Nennerfreiheitsgraden folgt, muß überprüft werden, ob für den aufgrund der vorhandenen Daten zu bestimmende Wert der Testvariablen

---

1) Zugrunde gelegt wird bei dieser Spezifikation natürlich, daß im ursprünglichen Modell $E(uu') = \sigma_b^2 A_b + \sigma_{\bar{b}}^2 A_b$ gilt.

2) vgl. Abschnitt 3.3.1

$$\frac{1}{F^{S-n}_{S-n;\alpha/2}} \leq \frac{\hat{\sigma}_b^2}{\hat{\sigma}_{\bar{b}}^2} \leq F^{S-n}_{S-n;\alpha/2}$$

gilt, denn da wegen

$$\mathfrak{H}: \sigma_b^2 = a\sigma_{\bar{b}}^2 \qquad a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\}$$

sowohl $\sigma_b^2 > \sigma_{\bar{b}}^2$ als auch $\sigma_b^2 < \sigma_{\bar{b}}^2$ im Rahmen des heteroskedastischen Modells möglich ist, muß der Test zweiseitig sein.

Sei abschließend noch ein Test auf gruppenspezifische Äquikorrealtion entwickelt. Ausgegangen wird dabei von dem zu einem Varianzkomponentenmodell erweiterten Querschnittsmodell

$$y_i = x_i'\beta + u_i \;;\; u_i = v_i + w_i \;;\; i \in \mathfrak{J}$$

$$E(v_i) = E(w_i) = 0 \quad \forall i \in \mathfrak{J} \;,\; E(v_i w_j) = 0 \quad \forall i,j \in \mathfrak{J} \;,$$

$$(Q'') \quad E(w_i^2) = \begin{cases} \sigma^2 - \rho_b & \forall i \in \mathfrak{J}(b) \\ \sigma^2 - \rho_{\bar{b}} & \forall i \in \mathfrak{J}(\bar{b}) \end{cases} \;,\; E(v_i v_j) = \begin{cases} \rho_b & \forall i,j \in \mathfrak{J}(b) \\ \rho_{\bar{b}} & \forall i,j \in \mathfrak{J}(\bar{b}) \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} ;$$

$$E(w_i w_j) = 0 \;\forall i \neq j$$

$$\beta \in \mathbb{R}^n,\; 0 < \sigma^2 < \infty,\; \sigma^2 > \rho_b > -\frac{\sigma^2}{h(b)-1},\; \sigma^2 > \rho_{\bar{b}} > -\frac{\sigma^2}{h(\bar{b})-1}, \quad 1)$$

das mit $\mathfrak{J} = \{1,2,\ldots,T\}$ unter Rückgriff auf die Auswahlmatrizen A_b und $A_{\bar{b}}$ auch durch

$$y = X\beta + u$$

$$(Q'') \quad E(u) = 0,\; E(uu') = (\sigma^2 - \rho_b)A_b + \rho_b A_b \iota_T \iota_T' A_b + (\sigma^2 - \rho_{\bar{b}})A_{\bar{b}} + \rho_{\bar{b}} A_{\bar{b}} \iota_T \iota_T' A_{\bar{b}} \;;$$

$$\beta \in \mathbb{R}^n,\; 0 < \sigma^2 < \infty,\; \sigma^2 > \rho_b > -\frac{\sigma^2}{h(b)-1},\; \sigma^2 > \rho_{\bar{b}} > -\frac{\sigma^2}{h(\bar{b})-1}$$

zu beschreiben ist. Zudem wird zugrunde gelegt, daß nur die aggregierten Variablen

$$\sum_{i \in \mathfrak{J}(a_k,b)} y_i,\; \sum_{i \in \mathfrak{J}(a_k,\bar{b})} y_i,\; \sum_{i \in \mathfrak{J}(a_k,b)} x_i,\; \sum_{i \in \mathfrak{J}(a_k,\bar{b})} x_i \;;\; k = 1,2,\ldots,s$$

beobachtet worden sind. Der Test wird somit im Rahmen des aus

---

1) Man beachte, daß natürlich $h(b), h(\bar{b}) \geq 2$ gelten muß, damit die Spezifikation als sinnvoll zu bezeichnen ist.

dem Modell (Q") abzuleitenden und durch die Annahme normalverteilter Störvariabler ergänzten Modells

$$\begin{pmatrix} G_{\mathfrak{N}}'A_b \\ G_{\mathfrak{M}}'A_{\bar{b}} \end{pmatrix} y = \begin{pmatrix} G_{\mathfrak{N}}'A_b \\ G_{\mathfrak{M}}'A_{\bar{b}} \end{pmatrix} X\beta + \begin{pmatrix} G_{\mathfrak{N}}'A_b \\ G_{\mathfrak{M}}'A_{\bar{b}} \end{pmatrix} u$$

$$(\bar{Q}^{*u}) \quad E\begin{pmatrix} G_{\mathfrak{N}}'A_b \\ G_{\mathfrak{M}}'A_{\bar{b}} \end{pmatrix} u = o;\ E\begin{pmatrix} G_{\mathfrak{N}}'A_b \\ G_{\mathfrak{M}}'A_{\bar{b}} \end{pmatrix} uu'(A_bG_{\mathfrak{M}}, A_{\bar{b}}G_{\mathfrak{M}}) = \begin{Bmatrix} (\sigma^2-\rho_b)G_{\mathfrak{N}}'A_bG_{\mathfrak{M}}+\rho_bG_{\mathfrak{M}}'A_b\imath_T\imath_T'A_bG_{\mathfrak{M}}, o \\ o, (\sigma^2-\rho_{\bar{b}})G_{\mathfrak{M}}'A_{\bar{b}}G_{\mathfrak{M}}+\rho_{\bar{b}}G_{\mathfrak{M}}'A_{\bar{b}}\imath_T\imath_T'A_{\bar{b}}G_{\mathfrak{M}} \end{Bmatrix}$$

$$\beta \in \mathbb{R}^n,\ o<\sigma^2<\infty, \sigma^2>\rho_b>-\frac{\sigma^2}{h(b)-1},\ \sigma^2>\rho_{\bar{b}}>-\frac{\sigma^2}{h(\bar{b})-1};\ u \text{ normalverteilt}$$

zu entwickeln sein. Zu beachten ist nun, daß, von

$$(A_bG_{\mathfrak{M}}, A_{\bar{b}}G_{\mathfrak{M}}) \begin{pmatrix} G_{\mathfrak{M}}'A_bG_{\mathfrak{M}}, & o \\ o, & G_{\mathfrak{M}}'A_{\bar{b}}G_{\mathfrak{M}} \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} G_{\mathfrak{M}}'A_b \\ G_{\mathfrak{M}}'A_{\bar{b}} \end{pmatrix} = P_{\mathfrak{M}/b}+P_{\mathfrak{N}/\bar{b}}$$

und

$$E(uu') = (\sigma^2-\rho_b)\{A_b-\frac{1}{h(b)}A_b\imath_T\imath_T'A_b\}+(\sigma^2+(h(b)-1)\rho_b)\frac{1}{h(b)}A_b\imath_T\imath_T'A_b$$

$$+(\sigma^2-\rho_{\bar{b}})\{A_{\bar{b}}-\frac{1}{h(\bar{b})}A_{\bar{b}}\imath_T\imath_T'A_{\bar{b}}\}+(\sigma^2+(h(\bar{b})-1)\rho_{\bar{b}})\frac{1}{h(\bar{b})}A_{\bar{b}}\imath_T\imath_T'A_{\bar{b}}$$

ausgehend, wegen

$$\{A_b-\frac{1}{h(b)}A_b\imath_T\imath_T'A_b\}+\frac{1}{h(b)}A_b\imath_T\imath_T'A_b+\{A_{\bar{b}}-\frac{1}{h(\bar{b})}A_{\bar{b}}\imath_T\imath_T'A_{\bar{b}}\}+\frac{1}{h(\bar{b})}A_{\bar{b}}\imath_T\imath_T'A_{\bar{b}}=A_b+A_{\bar{b}}=I$$

und

$$\{\frac{1}{h(b)}A_b\imath_T\imath_T'A_b\}^2=\frac{1}{h(b)^2}A_b\imath_T\imath_T'A_b\imath_T\imath_T'A_b=\frac{1}{h(b)}A_b\imath_T\imath_T'A_b$$

sowie

$$(P_{\mathfrak{M}/b}+P_{\mathfrak{M}/\bar{b}})\{A_b-\frac{1}{h(b)}A_b\imath_T\imath_T'A_b\}=P_{\mathfrak{M}/b}-\frac{1}{h(b)}P_{\mathfrak{M}/b}\imath_T\imath_T'A_b =$$

$$P_{\mathfrak{M}/b}-\frac{1}{h(b)}A_bG_{\mathfrak{M}}(G_{\mathfrak{M}}'A_bG_{\mathfrak{M}})^{-1}G_{\mathfrak{N}}'A_b\imath_T\imath_T'A_b=P_{\mathfrak{M}/b}-\frac{1}{h(b)}A_bG_{\mathfrak{M}}S^{-1}\imath_T'A_b =$$

$$P_{\mathfrak{M}/b}-\frac{1}{h(b)}A_b\imath_T\imath_T'A_b$$

die Vertauschbarkeit der Hauptidempotenten der Kovarianzmatrix der Störvariablen mit der zur Aggregationsmatrix gehörenden

Projektionsmatrix $P_{\sigma_1/b}+P_{\sigma_1/\bar{b}}$ festzustellen ist. Somit erfolgt, auf oben unter diesen Voraussetzungen gezeigtes zurückgreifend,[1] durch

$$\widehat{\sigma^2-\rho_b} = \frac{1}{(S-1)-(n-1)}\,\hat{u}_{(b)}'\,(G_{\sigma_1}'A_bG_{\sigma_1})^{-1}\,\hat{u}_{(b)}$$

mit

$$\hat{u}_{(b)} = G_{\sigma_1}'\{P_{\sigma_1/b}-\frac{1}{h(b)}A_b\imath_T\imath_T'A_b\}\{y-X\hat{\beta}_{(b)}\}$$

und

$$\hat{\beta}_{(b)}=\{X'(P_{\sigma_1/b}-\frac{1}{h(b)}A_b\imath_T\imath_T'A_b)X\}^{+}X'(P_{\sigma_1/b}-\frac{1}{h(b)}A_b\imath_T\imath_T'A_b)y$$

die beste quadratisch unverzerrte Schätzung von $\widehat{\sigma^2-\rho_b}$ im Rahmen des Modells ($\bar{Q}^{*}$"). Vorausgesetzt wird hierbei natürlich, daß

$$rg\{X'(P_{\sigma_1/b}-\frac{1}{h(b)}A_b\imath_T\imath_T'A_b)X\} = n-1$$

gilt, daß etwa

$$X=(\underset{Tx1}{\imath_T},\underset{Tx(n-1)}{Z}) \quad , rg\,A_bZ = rg\,A_{\bar{b}}Z=rg\,Z = n-1$$

zugrunde zu legen ist. Wenn

$$X=(\underset{Tx1,}{A_b\imath_T},\underset{Tx1,Tx(n-2)}{A_{\bar{b}}\imath_T,\ Z}) \ ,rg\,A_bZ=rg\,A_{\bar{b}}Z=rg\,Z=n-2$$

gilt, also gruppenspezifische Absolutglieder spezifiziert werden, gilt

$$rg\{X'(P_{\sigma_1/b}-\frac{1}{h(b)}\,A_b\imath_T\imath_T'A_b)X\} = n-2$$

so daß die gewogene Summe der Residuenquadrate nun durch (S-1)-(n-2) zu dividieren ist. Entsprechend ist vorzugehen, wenn mehrere gruppenspezifische Regressionskoeffizienten spezifiziert worden sind.

Da nun

$$\frac{1}{\sigma^2-\rho_b}\,\hat{u}_{(b)}'(G_{\sigma_1}'A_bG_{\sigma_1})^{-1}\hat{u}_{(b)}=\frac{1}{\sigma^2-\rho_b}u'\{(P_{\sigma_1/b}-\frac{1}{h(b)}A_b\imath_T\imath_T'A_b)-(P_{\sigma_1/b}-\frac{1}{h(b)}A_b\imath_T\imath_T'A_b)X\,*$$

$$\{X'(P_{\sigma_1/b}-\frac{1}{h(b)}A_b\imath_T\imath_T'A_b)X\}^{+}X'(P_{\sigma_1/b}-\frac{1}{h(b)}A_b\imath_T\imath_T'A_b)\}u \sim \chi^2_{S-n}$$

---

1) vgl. Abschnitt 3.2.2

gilt, kann wegen

$$(P_{\mathfrak{A}/b}-\frac{1}{h(b)}A_b\mathfrak{1}\mathfrak{T}^{-1}\mathfrak{T}'A_b)\{(\sigma^2-\rho_b)A_b+\rho_bA_b\mathfrak{1}\mathfrak{T}^{-1}\mathfrak{T}'A_b+(\sigma^2-\rho_{\bar{b}})A_{\bar{b}}+\rho_{\bar{b}}A_{\bar{b}}\mathfrak{1}\mathfrak{T}^{-1}\mathfrak{T}'A_{\bar{b}}\}*$$

$$\{P_{\mathfrak{A}/\bar{b}}-\frac{1}{h(\bar{b})}A_{\bar{b}}\mathfrak{1}\mathfrak{T}^{-1}\mathfrak{T}'A_b\}=0$$

eingesehen werden, daß

$$\frac{\frac{1}{S-n}\hat{u}_{(b)}'(G_{\mathfrak{A}}'A_bG_{\mathfrak{A}})^{-1}\hat{u}_{(b)}}{\frac{1}{S-n}\hat{u}_{(\bar{b})}'(G_{\mathfrak{A}}'A_{\bar{b}}G_{\mathfrak{A}})^{-1}\hat{u}_{(\bar{b})}}=\frac{\widehat{\sigma^2-\rho_b}}{\widehat{\sigma^2-\rho_{\bar{b}}}}$$

einer F-Verteilung mit (S-n) Zähler- und Nennerfreiheitsgraden folgt, wenn die Hypothese

$$\mathfrak{H}: \rho_b=\rho_{\bar{b}}$$

gilt. Somit ist also eine geeignete Testvariable gefunden, denn man wird die Hypothese verwerfen können, wenn entweder

$$\frac{\widehat{\sigma^2-\rho_b}}{\widehat{\sigma^2-\rho_{\bar{b}}}} > F^{S-n}_{S-n,\alpha/2} \quad \text{oder} \quad \frac{\widehat{\sigma^2-\rho_{\bar{b}}}}{\widehat{\sigma^2-\rho_b}} > F^{S-n}_{S-n,\alpha/2}$$

gilt.

Abschließend sei noch bemerkt, daß auch dieser Test zwar für alle Parameter σ^2 anzuwenden ist, daß aber die Macht dieses Tests nicht nur von dem Verhältnis von ρ_b und $\rho_{\bar{b}}$ abhängt, sondern entscheidend durch die Verhältnisse ρ_b/σ^2 und $\rho_{\bar{b}}/\sigma^2$ bestimmt wird. Insbesondere ist die Wahrscheinlichkeit, die Hypothese zu verwerfen, obwohl sich ρ_b und $\rho_{\bar{b}}$ stark unterscheiden, sehr klein, wenn σ^2 sehr groß ist.

3.4.2 Allgemeiner Test

Tests von Hypothesen über die V-Struktur der Modelle (M^*) und $(\bar{M}^*)$ bzw. $(\bar{M}^{*'})$ und $(\bar{M}^{*'})$ sind zwar möglich, man denke etwa an einen Test der Hypothese

$$\mathcal{H}: \sigma^2 \geq \sigma_0^2 \ , \quad \sigma_0^2 \in \mathbb{R}^+ \ .$$

Da aber solche Hypothesen nur in den seltensten Fällen als relevant zu bezeichnen sind, wird auf eine Darstellung solcher Tests verzichtet.

Durch obige Beispiele wurde schon angedeutet, daß Tests von Hypothesen über die V-Struktur von Varianzkomponentenmodellen von besonderer Bedeutung sind. Es sei deshalb der Test der Hypothese

$$\mathcal{H}: \omega_k^2 = a\ \omega_1^2 \ ; \quad a \in \mathbb{R}^+$$

gegen die Alternativhypothese

$$\bar{\mathcal{H}}: \omega_k^2 = b \cdot \omega_1^2 \ ; \ b \in \mathbb{R}^+ \setminus \{a\}$$

im Rahmen des Modells $(\bar{M}^{*''})$ dargestellt, wobei jedoch wiederum die Vertauschbarkeit der Matrizen Ω_i mit der Matrix P_G vorausgesetzt wird. Da nun

$$\frac{1}{\omega_k^2}\overset{\vee}{u}_{(k)}'(G'G)^+\overset{\vee}{u}_{(k)} =$$

$$\frac{1}{\omega_k^2}\, u'\{\Omega_k P_G \Omega_k - \Omega_k P_G \Omega_k X(X'\Omega_k P_G \Omega_k X)^+ X'\Omega_k P_G \Omega_k\}u \sim \chi^2_{n_k}$$

mit $n_k = rg\ G'\Omega_k - rg\ G'\Omega_k X$ gilt, muß die Variable [1]

$$(\bar{T}''.2) \qquad \bar{F}''_{(k,1)} = a\,\frac{\omega_1^2}{\omega_k^2}$$

bei Gültigkeit der Hypothese einer F-Verteilung mit n_1 Zähler- und n_k Nennerfreiheitsgraden folgen[2]. Die Hypothese $\mathcal{H}$ kann somit nicht verworfen werden, wenn aufgrund der vorliegenden Daten bei vorgegebener Irrtumswahrscheinlichkeit α

$$\frac{1}{F^{n_k}_{n_1;\alpha/2}} \leq \bar{F}''_{(k,1)} \leq F^{n_1}_{n_k;\,\alpha/2} \qquad \text{gilt.}$$

---

1) vgl. Abschnitt 3.2.2, insbesondere $\bar{S}''.3)$

2) Die Unabhängigkeit der χ^2-Variablen ist wegen $\Omega_k\Omega_l = o\ \forall\ k \neq l$ unmittelbar einzusehen.

4. Degregation

Während bisher dargestellt wurde, wie die Struktur eines einer direkten Schätzung nicht zugänglichen ursprünglichen Modells in einem aggregierten Modell zu schätzen und zu testen ist, soll nun untersucht werden, wie die Realisationen der im Rahmen des ursprünglichen Modells erklärten, aber nicht beobachteten ursprünglichen Variablen aufgrund der vorhandenen Beobachtungswerte für die Realisationen der entsprechenden aggregierten Variablen zu schätzen sind. Dieses als Degregation bezeichnete Schätzproblem wird nun zuerst von den mit der Strukturschätzung verbundenen Problemen befreit, indem davon ausgegangen wird, daß die Struktur und somit der Erwartungswert und die Kovarianzmatrix der in ihren Realisationen zu schätzenden Variablen bekannt ist. Erst dann wird eine Lösung für das eigentliche Degregationsproblem gegeben, bei der für die in ihren Realisationen zu schätzenden Variablen eines der linearen Modelle zugrunde zu legen ist, dessen Struktur ob der fehlenden Beobachtungswerte nur im Rahmen des entsprechenden aggregierten Modells zu schätzen ist.

4.1 Degregation bei bekannter Struktur

Wenn über die in einem (Tx1) Vektor y zusammengefaßten Variablen nicht nur bekannt ist, daß $E(y)=\theta$ und $V(y)=\sigma^2 I$ gilt, sondern auch die Realisationen der aggregierten Variablen $\bar{y}$, die stets aufgrund einer Aggregation mit der (SxT)Matrix G' aus den Variablen y ergeben, beobachtet worden sind, so ist

$$\hat{y}=\theta+G(G'G)^{+}(\bar{y}-G'\theta)=(I-P_G)\theta+G(G'G)^{+}\bar{y} \quad 1)$$

die beste, d.h. mit der kleinsten Schätzfehlervarianz ausgestattete, in den aggregierten Variablen lineare und erwartungstreue Schätzung der Realisationen der ursprünglichen Variablen.

---

1) Durch $y=(I-P_G)\theta+G(G'G)^{+}\bar{y}$ ist diese Schätzung einer mehr algebraischen Interpretation zugänglich. Man ersetzt nämlich den in $\mathcal{R}(G)$ liegenden Teil der Realisation von y durch den entsprechenden Teil des Erwartungswertes, da von der Realisation $\bar{y}$ ausgehend nur auf den in $\mathcal{R}(G)$ liegenden Teil der Realisation geschlossen werden kann, und erhält durch das Zusammenfügen von $G(G'G)^{+}\bar{y}$ aus $\mathcal{R}(G)$ und $(I-P_G)\theta$ aus $\mathcal{N}(G)$ obige Schätzung.

Da nämlich

$$E(y-\hat{y})=E(y-\Theta)-G(G'G)^{+}G'E(y-\Theta)=(I-P_G)E(y-\Theta)=o$$

$$V(y-\hat{y})=E\{(I-P_G)(y-\Theta)(y-\Theta)'(I-P_G)\}=\sigma^2(I-P_G)$$

gilt, muß nur noch gezeigt werden, daß jede andere in $\bar{y}$ lineare und unverzerrte Schätzung

$$\hat{\hat{y}}=\hat{y}+D\bar{y}-d$$

die nur mit $d=DG'\Theta$ erwartungstreu ist, eine größere Schätzfehlervarianz besitzt. Wegen

$$E(y-\hat{\hat{y}})=(I-P_G)E(y-\Theta)-DG'E(y-\Theta)=o$$

$$V(y-\hat{\hat{y}})=\sigma^2\{(I-P_G)+DG'GD'\}$$

kann dies aber, da die Matrix $DG'GD'$ positiv semidefinit ist, unmittelbar eingesehen werden.

Auf eine wichtige Eigenschaft dieser Schätzung sei noch hingewiesen. So ist wegen

$$G'V(y-y)G=\sigma^2G'(I-P_G)G=o$$

sichergestellt, daß stets $G'\hat{y}=\bar{y}$ gilt, eine Aggregation der Schätzung also wieder auf die bekannten Realisationen der aggregierten Variablen führt.

Sei nun, um die Degregation bei bekannter Struktur etwas zu verallgemeinern, davon ausgegangen, daß $E(y)=\Theta$ und $V(y)=\sigma^2\Sigma$ gilt. Unter diesen Umständen ist nun nichts besseres zu tun, als die Realisationen y durch

$$\hat{y}=\Theta+\Sigma G(G'\Sigma G)^{+}(\bar{y}-G'\Theta)=\{I-\Sigma G(G'\Sigma G)^{+}G'\}O+\Sigma G(G'\Sigma G)^{+}\bar{y}$$

zu schätzen, wobei sich die Varianz des mit dieser Schätzung verbundenen Schätzfehlers durch

$$V(y-\hat{y})=\sigma^2\{\Sigma-\Sigma G(G'\Sigma G)^{+}G'\Sigma\}$$

bestimmt. Daß auch in diesem Fall

$$G'V(y-\hat{y})G=\sigma^2\{G'\Sigma G-G'\Sigma G(G'\Sigma G)^{+}G'\Sigma G\}=o$$

gilt, überrascht ebensowenig wie die obigem Vorgehen analog zu zeigende Optimalität dieser Schätzung.

Der Vollständigkeit halber sei abschließend noch darauf hingewiesen, daß von $E(y)=\theta$ und $V(y)=\sum_{i\in\mathfrak{J}}\omega_i^2\Omega_i$ ausgehend auf die zuerst vorgeschlagene Degregation zurückgegriffen werden kann, sofern die Matrizen Ω_i und P_G, wie bisher immer vorausgesetzt, vertauschbar sind, denn es gilt

$$\hat{\bar{y}}=\theta+\sum_{i\in\mathfrak{J}}\omega_i^2\Omega_i G\{\sum_{j\in\mathfrak{J}}\omega_j^2 G'\Omega_j G\}^{+}(\bar{y}-G'\theta)$$

$$=\theta+\sum_{i\in\mathfrak{J}}\sum_{j\in\mathfrak{J}}\omega_i^2\omega_j^{-2}\,\Omega_i P_G\Omega_j G(G'G)^{+}(\bar{y}-G'\theta)$$

$$=\theta+\sum_{i\in\mathfrak{J}}\Omega_i G(G'G)^{+}(\bar{y}-G'\theta)=\theta+G(G'G)^{+}(\bar{y}-G'\theta).$$

4.2 Degregation bei zu schätzender Struktur

Reichen die über die Variable y vorhandenen Informationen nicht aus, daraus den Erwartungswert und die Kovarianzmatrix abzuleiten, und ist es stattdessen aber möglich, ein Modell zur Erklärung dieser Variablen zu spezifizieren, so bietet es sich an, in obiger Schätzung den als bekannt vorausgesetzten Erwartungswert θ durch eine unter Zugrundelegung des Modells gewonnene Schätzung zu ersetzen.

Sei zuerst das Modell (M) zugrunde gelegt. Natürlich muß dann auf die Schätzung

$$(\bar{S}.1)\quad \acute{\beta}=\{\bar{X}'(G'G)^{+}\bar{X}\}^{-1}\bar{X}'(G'G)^{+}\bar{y}$$

zurückgegriffen werden, da nur die Realisationen der aggregierten Variablen $\bar{y}$ bekannt sind und somit nur das Modell $(\bar{M})$ zur Strukturschätzung herangezogen werden kann. Dem Vorschlag entsprechend sind die Realisationen der ursprünglichen Variablen deshalb durch

$$(\bar{S}.5)\quad \check{y}=X\check{\beta}+G(G'G)^{+}(\bar{y}-\bar{X}\check{\beta})=(I-P_G)X\check{\beta}+G(G'G)^{+}\bar{y}$$

zu schätzen. Als Schätzfehler ergibt sich dann

$$y-\check{y}=(I-P_G)u-(I-P_G)X(X'P_GX)^{-1}X'P_Gu\,,$$

so daß die Erwartungstreue der Schätzung direkt einzusehen und die Varianz des Schätzfehlers

$$(\bar{S}.6)\quad V(y-\breve{y})=\sigma^2\{(I-P_G)+(I-P_G)X(X'P_GX)^{-1}X'(I-P_G)\}$$

$$=\sigma^2(I-P_G)\{I+X(X'P_GX)^{-1}X'\}(I-P_G)$$

leicht abzuleiten ist. Unterstrichen wird dadurch auch, daß die Degregation als eine besondere Prognoseschätzung aufzufassen ist, in die nicht nur eine Strukturschätzung eingeht, sondern auch vorhandene a priori Informationen über die zu prognostizierenden Realisationen der Variablen, nämlich die bekannten Realisationen der aggregierten Variablen, Berücksichtigung finden. Es ist insofern nicht überraschend, daß auch für diese Schätzung

$$G'\breve{y}=\bar{X}\breve{\beta}+G'G(G'G)^{+}(\bar{y}-\bar{X}\breve{\beta})=\bar{y}$$

gilt. Daß diese Schätzung schließlich die beste, in $\bar{y}$ lineare und unverzerrte Schätzung ist, kann obigem Vorgehen analog gezeigt werden. So muß eine beliebige in $\bar{y}$ lineare Schätzung

$$\breve{\breve{y}}=\breve{y}-D\bar{y}+d,$$

damit sie stets erwartungstreu ist, wegen

$$E(y-\breve{\breve{y}})=DG'X\beta-d$$

die Bedingungen

$$DG'X=o,\quad d=o$$

erfüllen. Dann aber ergibt sich als Schätzfehler

$$y-\breve{\breve{y}}=(I-P_G)u-(I-P_G)X'P_GX)^{-1}X'P_Gu+DG'u\ ,$$

so daß unmittelbar einzusehen ist, daß die Schätzung $\breve{y}$, da

$$V(y-\breve{\breve{y}})-V(y-\breve{y})=\sigma^2DG'GD'$$

positiv semidefinit ist, durch die kleinste Schätzfehlervarianz gekennzeichnet ist. [1)]

Entsprechend ist vorzugehen, wenn das Modell (M') zugrunde zu legen ist. Daß dann auf die Strukturschätzung ($\bar{S}.1'$) zurückgegriffen werden muß und die Realisationen der Variablen y durch

$$(\bar{S}.5')\quad \breve{y}=X\breve{\beta}+\Sigma G(G'\Sigma G)^{+}(\bar{y}-\bar{X}\breve{\beta})=\{I-\Sigma G(G\Sigma G)^{+}G'\}X\breve{\beta}+\Sigma G(G'\Sigma G)^{+}\bar{y}$$

---

1) Für einen anderen, direkten Beweis der Optimalität siehe G.C.Chow und An-loh Lin (1971) Seite 373.

mit

$$(\bar{S}.6') \quad V(y-\check{y})=\sigma^2\{I-\Sigma G(G'\Sigma G)^{+}G'\}\{\Sigma+X\{\bar{X}'(G'\Sigma G)^{+}\bar{X}\}^{-1}\bar{X}'\}\{I-G(G'\Sigma G)^{+}G'\Sigma\}$$

zu schätzen ist, bedarf keiner weiteren Erläuterung.

Daß die Degregation mit der Aitken-Prognoseschätzung im Rahmen des "Prognosemodells"

$$\begin{pmatrix}\bar{y}\\ y\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\bar{X}\\ X\end{pmatrix}\beta + \begin{pmatrix}\bar{u}\\ u\end{pmatrix} \quad ;$$

$$E\begin{pmatrix}\bar{u}\\ u\end{pmatrix}= o,\ E\begin{pmatrix}\bar{u}\bar{u}' & \bar{u}u'\\ u\bar{u}' & uu'\end{pmatrix}= \sigma^2\begin{pmatrix}G'G & G'\\ G & I\end{pmatrix};\ \beta\in\mathbb{R}^n,\ o<\sigma^2<\infty \quad ;$$

übereinstimmt, kann leicht eingesehen werden.[1] An Hand einiger der schon oben aufgeführten Modelle und Aggregationen soll nun zum einen verdeutlicht werden, daß es, obwohl formal gleich, zumindest inhaltliche Unterschiede zwischen Degregation und Prognose gibt, die, da inhaltlicher Natur, erst dann zu Tage treten, wenn Modelle und Aggregationen betrachtet werden, die einen ökonomischen Bezug haben. Zum anderen soll dadurch belegt werden, daß die der Degregation zugrunde liegende Methode zur Nutzung der Kenntnis der aggregierten Residuen, die Form ihrer Berücksichtigung, eigentlich unmittelbar auf der Hand liegt.

Sei zuerst das Zeitreihenmodell (Z) zugrunde gelegt und wieder davon ausgegangen, daß während der ersten T_1 Jahre für die zu erklärenden Variablen nur die Realisationen von Jahresvariablen beobachtet worden sind und somit für Strukturschätzungen auf das für Bestandsvariable gültige aggregierte Modell ($\bar{Z}$.1) bzw. das für Strömungsvariable gültige Modell ($\bar{Z}$.2) zurückgegriffen werden muß. Die Realisationen der Quartalsvariablen für die ersten T_1 Jahre sind natürlich durch die auf der im Rahmen des jeweils gültigen aggregierten Modells bestimmten Strukturschätzung aufgebauten Standardprognose erwartungstreu zu schätzen. Greift man jedoch nicht nur auf die jeweiligen Strukturschätzungen sondern auch auf die entsprechenden aggregierten

---

1) vgl. H. Theil(1971 Seite 28o, Theorem 6.5

Residuen zurück, so drängt sich die als Interpolation bezeichnete Schätzung

$$\hat{y}_{(1)t} = X_t'\hat{\beta}_{(1)} + e_4 e_4'\hat{u}_{(1)t}, e_4'\hat{u}_{(1)t} = e_4'y_t - e_4'X_t'\hat{\beta}_{(1)}, t=1,2,\ldots,T_1$$

bzw. die als Distribution bezeichnete Schätzung[1)]

$$\hat{y}_{(2)t} = X_t'\hat{\beta}_{(2)} + \frac{1}{4}\iota_4\iota_4'\hat{u}_{(2)t}, \iota_4'\hat{u}_{(2)t} = \iota_4'y_t - \iota_4'X_t'\hat{\beta}_{(2)}, t=1,2,\ldots,T_1$$

auf, denn das einer sich am Jahresende realisierenden Bestandsvariablen zuzuordnende Residuum ganz der Prognose für die Realisation der sich am Ende des vierten Quartals realisierenden Quartalsvariablen zuzuschlagen, erscheint genauso sinnvoll wie die gleichmäßige Aufteilung des sich bei einer Jahresstromvariablen einstellenden Residuums auf die einzelnen Prognosen für die Realisationen der Quartalsstromvariablen. Würden nämlich Informationen über die in ihrer Realisation zu schätzenden Variablen vorliegen, die obiges Vorgehen nicht als sinnvoll erscheinen lassen, die beispielsweise einen Schluß von dem Residuum der Jahresbestandsvariablen auf die Realisation der Störvariablen nicht nur der sich am Ende des vierten Quartals realisierenden Variablen zulassen, oder eine Diskriminierung der einzelnen Quartale bei der Aufteilung des Jahresstromresiduums nahelegt, so müssen diese Informationen zwangsläufig zu einer Modifikation der jeweils zugrunde liegenden Modellspezifikation, beispielsweise durch die Berücksichtigung einer Autokorrelations- oder Saisonstruktur, führen.

Sei nun das Querschnittsmodell (Q) zugrunde gelegt. Wenn nur die Realisationen y_{α} der über ökonomische Einheiten mit jeweils gleicher Merkmalsausprägung a_k des Merkmals α summierten Variablen y vorliegen, wird man nichts besseres tun können, als von der Standardprognose ausgehend ein jedes Gruppenresiduum gleichmäßig auf die entsprechenden Individualprognosen zu verteilen, also durch [2)]

$$\check{y}_{\alpha} = X\check{\beta}_{(\alpha)} + G_{\alpha}(G_{\alpha}'G_{\alpha})^{-1}\check{u}_{\alpha}$$

zu degregieren. Sind jedoch nicht die Realisationen der durch

---

1) vgl. Abschnitt 3.1.1 und G.C.Chow und An-loh Lin (1971) Seite 372-374

2) vgl. Abschnitt 3.1.3 und 3.2.1

eine Summation entstandenen Variablen $y_{\mathfrak{A}}$ sondern der durch eine Mittelung sich ergebenden Variablen $\bar{y}_{\mathfrak{A}}$ [1] beobachtet worden, so ist das Gruppenresiduum direkt allen entsprechenden Individualprognosen zuzuschlagen, also durch

$$\check{y}_{\mathfrak{A}} = X\check{\beta}_{(\mathfrak{A})} + G_{\mathfrak{A}}\check{\bar{u}}_{\mathfrak{A}}$$

zu degregieren, wobei

$$\check{\bar{u}} = \bar{y}_{\mathfrak{A}} - \bar{X}_{\mathfrak{A}}\check{\beta}_{(\mathfrak{A})} = (G_{\mathfrak{A}}'G_{\mathfrak{A}})^{-1}G_{\mathfrak{A}}'y - (G_{\mathfrak{A}}'G_{\mathfrak{A}})^{-1}G_{\mathfrak{A}}'X\{X'P_{\mathfrak{A}}X\}^{-1}X'P_{\mathfrak{A}}y$$

das aggregierte Residuum ist. Daß die auf summierten und gemittelten aggregierten Variablen basierenden Degregationen dann identisch sind, kann leicht eingesehen werden.

Wenn nun neben dem Merkmal $\mathfrak{A}$ noch das Merkmal $\mathfrak{L}$ zur Gruppierung mit einfacher Summation herangezogen worden ist, so liegt es nahe, die Degregation durch [2]

$$\check{y}_{\mathfrak{A},\mathfrak{L}} = X\check{\beta}_{(\mathfrak{A},\mathfrak{L})} + G_{\mathfrak{A}}(G_{\mathfrak{A}}'G_{\mathfrak{A}})^{-1}\check{u}_{\mathfrak{A}/\mathfrak{A},\mathfrak{L}} + G_{\mathfrak{L}}(G_{\mathfrak{L}}'G_{\mathfrak{L}})^{-1}u_{\mathfrak{L}/\mathfrak{A},\mathfrak{L}}$$

vorzunehmen. Daß diese Degregation, bei der die Distribution der Residuen $\check{u}_{\mathfrak{A}/\mathfrak{A},\mathfrak{L}}$ und $\check{u}_{\mathfrak{L}/\mathfrak{A},\mathfrak{L}}$ voneinander unabhängig vorgenommen wird, jedoch nur dann optimal ist, wenn die Merkmale $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{L}$ unabhängig sind, erscheint zwar aufgrund der bisher unter der Annahme der Unabhängigkeit abgeleiteten Schätzungen plausibel, soll aber trotzdem gezeigt werden. Da wegen

$$rg(G_{\mathfrak{A}},G_{\mathfrak{L}}) = R+S-1 = rg(P_{\mathfrak{A}}+P_{\mathfrak{L}}-\frac{1}{T}\iota_T\iota_T')$$

und

$$(P_{\mathfrak{A}}+P_{\mathfrak{L}}-\frac{1}{T}\iota_T\iota_T')G_{\mathfrak{A}} = G_{\mathfrak{A}}+G_{\mathfrak{L}}(G_{\mathfrak{L}}'G_{\mathfrak{L}})^{-1}G_{\mathfrak{L}}'\frac{1}{T}\iota_T\iota_T'G_{\mathfrak{A}}-\frac{1}{T}\iota_T\iota_T'G_{\mathfrak{A}} = G_{\mathfrak{A}}$$

einzusehen ist, daß bei Unabhängigkeit

$$P_{\mathfrak{A},\mathfrak{L}} = P_{\mathfrak{A}}+P_{\mathfrak{L}}-\frac{1}{T}\iota_T\iota_T'$$

gilt, so ergibt sich, die allgemeine Lösung entsprechend auf dieses Problem angewandt, daß

---

1) vgl. Abschnitt 2.2.1, dort (A.6)

2) vgl. Abschnitt 3.1.3 und 3.2.1

$$\begin{aligned}\check{y}_{\mathfrak{A},\mathfrak{L}} &= (I-P_{\mathfrak{A},\mathfrak{L}})X\check{\beta}_{(\mathfrak{A},\mathfrak{L})}+P_{\mathfrak{A},\mathfrak{L}}y \\ &= X\check{\beta}_{(\mathfrak{A},\mathfrak{L})}+P_{\mathfrak{A}}(y-X\check{\beta}_{(\mathfrak{A},\mathfrak{L})})+P_{\mathfrak{L}}(y-X\check{\beta}_{(\mathfrak{A},\mathfrak{L})})-\frac{1}{T}\iota_T\iota_T'(y-X\check{\beta}_{(\mathfrak{A},\mathfrak{L})}) \\ &= X\check{\beta}_{(\mathfrak{A},\mathfrak{L})}+G_{\mathfrak{A}}(G_{\mathfrak{A}}'G_{\mathfrak{A}})^{-1}\check{u}_{\mathfrak{A}/\mathfrak{A},\mathfrak{L}}+G_{\mathfrak{L}}(G_{\mathfrak{L}}'G_{\mathfrak{L}})^{-1}\check{u}_{\mathfrak{L}/\mathfrak{A},\mathfrak{L}}-\frac{1}{T}\iota_T\iota_S'u_{\mathfrak{A}/\mathfrak{A},\mathfrak{L}}\end{aligned}$$ 1)

die optimale Degregation ist. Berücksichtigt man nun noch, daß unter den erklärenden Variablen eine Scheinvariable ist,[2] so ist mit

$$X=(\iota_T,Z) \quad \beta'=(\alpha,\gamma')$$

nachzuvollziehen, daß

$$y-\iota_T\check{\alpha}_{(\mathfrak{A},\mathfrak{L})}-Z\check{\gamma}_{(\mathfrak{A},\mathfrak{L})}=y^*-Z^*\{Z^{*\prime}(P_{\mathfrak{A}}+P_{\mathfrak{L}})Z^*\}^{-1}Z^{*\prime}(P_{\mathfrak{A}}+P_{\mathfrak{L}})y^*$$

gilt und somit wegen

$$\iota_T'(y-\iota_T\check{\alpha}_{(\mathfrak{A},\mathfrak{L})}-Z\check{\gamma}_{(\mathfrak{A},\mathfrak{L})}) = 0$$

die Optimalität der zuerst angeregten Degregation gezeigt ist.[3]

Bei beliebiger gemeinsamer Verteilung der Merkmale $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{L}$ läßt sich die Matrix $P_{\mathfrak{A},\mathfrak{L}}$ nur durch

$$P_{\mathfrak{A},\mathfrak{L}}=P_{\mathfrak{A}}+(I-P_{\mathfrak{A}})G_{\mathfrak{L}}\{G_{\mathfrak{L}}'(I-P_{\mathfrak{A}})G_{\mathfrak{L}}\}^{+}G_{\mathfrak{L}}'(I-P_{\mathfrak{A}})$$

oder

$$P_{\mathfrak{A},\mathfrak{L}}=P_{\mathfrak{L}}+(I-P_{\mathfrak{L}})G_{\mathfrak{A}}\{G_{\mathfrak{A}}'(I-P_{\mathfrak{L}})G_{\mathfrak{A}}\}^{+}G_{\mathfrak{A}}'(I-P_{\mathfrak{L}})$$

aufspalten, so daß dann durch

$$\begin{aligned}\check{y}_{\mathfrak{A},\mathfrak{L}} &= X\check{\beta}_{(\mathfrak{A},\mathfrak{L})}+G_{\mathfrak{A}}(G_{\mathfrak{A}}'G_{\mathfrak{A}})^{-1}\check{u}_{\mathfrak{A}/\mathfrak{A},\mathfrak{L}} \\ &\quad +(I-P_{\mathfrak{A}})G_{\mathfrak{L}}\{G_{\mathfrak{L}}'(I-P_{\mathfrak{A}})G_{\mathfrak{L}}\}^{+}\{\check{u}_{\mathfrak{L}/\mathfrak{A},\mathfrak{L}}-G_{\mathfrak{L}}'G_{\mathfrak{A}}(G_{\mathfrak{A}}'G_{\mathfrak{A}})^{-1}u_{\mathfrak{A}/\mathfrak{A},\mathfrak{L}}\}\end{aligned}$$

---

1) Man beachte, daß diese Korrektur wegen $\iota_T=G_{\mathfrak{A}}\iota_S=G_{\mathfrak{L}}\iota_R$ auch durch $\frac{1}{T}\iota_T\iota_R'u_{\mathfrak{L}/\mathfrak{A},\mathfrak{L}}$ vorgenommen werden kann.

2) Diese Annahme lag implizit allen bisher bei Unabhängigkeit abgeleiteten Schätzungen zugrunde. vgl. Abschnitt 3.1.3 und 3.2.1

3) Zu bemerken ist noch, daß dann nicht nur $\iota_S'\check{u}_{\mathfrak{A}/\mathfrak{A},\mathfrak{L}}=\iota_T'G_{\mathfrak{A}}*(G_{\mathfrak{A}}'G_{\mathfrak{A}})^{-1}\check{u}_{\mathfrak{A}/\mathfrak{A},\mathfrak{L}}=0$ und $\iota_R'\check{u}_{\mathfrak{L}/\mathfrak{A},\mathfrak{L}}=\iota_T'G_{\mathfrak{L}}(G_{\mathfrak{L}}'G_{\mathfrak{L}})^{-1}\check{u}_{\mathfrak{L}/\mathfrak{A},\mathfrak{L}}=0$ sondern auch $\check{u}_{\mathfrak{A}/\mathfrak{A},\mathfrak{L}}(G_{\mathfrak{A}}'G_{\mathfrak{A}})^{-1}G_{\mathfrak{A}}'G_{\mathfrak{L}}(G_{\mathfrak{L}}'G_{\mathfrak{L}})^{-1}u_{\mathfrak{L}/\mathfrak{A},\mathfrak{L}}=0$ gilt.

oder

$$\breve{y}_{\mathfrak{N},\mathfrak{L}} = X\breve{\beta}_{(\mathfrak{N},\mathfrak{L})} + G_{\mathfrak{L}}(G_{\mathfrak{L}}'G_{\mathfrak{L}})^{-1}\breve{u}_{\mathfrak{L}/\mathfrak{N},\mathfrak{L}}$$

$$+(I-P_{\mathfrak{L}})G_{\mathfrak{N}}\{G_{\mathfrak{N}}'(I-P_{\mathfrak{L}})G_{\mathfrak{N}}\}^{+}\{\breve{u}_{\mathfrak{N}/\mathfrak{N},\mathfrak{L}} - G_{\mathfrak{N}}'G_{\mathfrak{L}}(G_{\mathfrak{L}}'G_{\mathfrak{L}})^{-1}\breve{u}_{\mathfrak{L}/\mathfrak{N},\mathfrak{L}}\}$$

zu degregieren ist. Der Abhängigkeit der Merkmale $\mathfrak{N}$ und $\mathfrak{L}$ wird also dadurch Rechnung getragen, daß von den Residuen $\breve{u}_{\mathfrak{L}/\mathfrak{N},\mathfrak{L}}$ ($\breve{u}_{\mathfrak{N}/\mathfrak{N},\mathfrak{L}}$) die erst nach dem Merkmal $\mathfrak{N}$ ($\mathfrak{L}$) degregierten und dann nach dem Merkmal $\mathfrak{L}$ ($\mathfrak{N}$) aggregierten Residuen $\breve{u}_{\mathfrak{N}/\mathfrak{N},\mathfrak{L}}$ ($\breve{u}_{\mathfrak{L}/\mathfrak{N},\mathfrak{L}}$) abgezogen werden, bevor sie nebst den nach dem Merkmal $\mathfrak{N}$ ($\mathfrak{L}$) degregierten Residuen $\breve{u}_{\mathfrak{N}/\mathfrak{N},\mathfrak{L}}$ ($\breve{u}_{\mathfrak{L}/\mathfrak{N},\mathfrak{L}}$) durch die Matrix $(I-P_{\mathfrak{N}})G_{\mathfrak{L}}\{G_{\mathfrak{L}}'(I-P_{\mathfrak{N}})G_{\mathfrak{L}}\}^{+}$ ($(I-P_{\mathfrak{L}})G_{\mathfrak{N}}\{G_{\mathfrak{N}}'(I-P_{\mathfrak{L}})G_{\mathfrak{N}}\}^{+}$) degregiert der Prognose zugeschlagen werden.

Im Rahmen des bisher betrachteten Modells wurden die Matrizen $G_{\mathfrak{N}}(G_{\mathfrak{N}}'G_{\mathfrak{N}})^{-1}$ und $G_{\mathfrak{L}}(G_{\mathfrak{L}}'G_{\mathfrak{L}})^{-1}$ nur zur Distribution von Residuen herangezogen. Sei nun ein besonders einfaches Querschnittsmodell zugrunde gelegt, daß von einem über ökonomische Einheiten mit gleicher Merkmalsausprägung a_k konstanten Erwartungswert der zu erklärenden Variablen ausgeht, so sind die Realisationen der ursprünglichen Variablen auf der Grundlage der Realisationen der aggregierten Variablen $y_{\mathfrak{N}}$ durch

$$\breve{y}_{\mathfrak{N}} = (I-P_{\mathfrak{N}})G_{\mathfrak{N}}(G_{\mathfrak{N}}'G_{\mathfrak{N}})^{-1}y_{\mathfrak{N}} + G_{\mathfrak{N}}(G_{\mathfrak{N}}'G_{\mathfrak{N}})^{-1}y_{\mathfrak{N}} = G_{\mathfrak{N}}(G_{\mathfrak{N}}'G_{\mathfrak{N}})^{-1}y_{\mathfrak{N}}$$

zu schätzen, kann die Matrix $G_{\mathfrak{N}}(G_{\mathfrak{N}}'G_{\mathfrak{N}})^{-1}$ direkt zur Distribution der Realisationen der aggregierten Variablen $y_{\mathfrak{N}}$ herangezogen werden. Sind jedoch die Realisationen der aggregierten Variablen $y_{\mathfrak{L}}$ zur Degregation zu verwenden, so ist durch

$$\breve{y}_{\mathfrak{L}} = G_{\mathfrak{N}}\{G_{\mathfrak{N}}'P_{\mathfrak{L}}G_{\mathfrak{N}}\}^{-1}G_{\mathfrak{N}}'G_{\mathfrak{L}}(G_{\mathfrak{L}}'G_{\mathfrak{L}})^{-1}y_{\mathfrak{L}} + G_{\mathfrak{L}}(G_{\mathfrak{L}}'G_{\mathfrak{L}})^{-1}\{y_{\mathfrak{L}} - G_{\mathfrak{L}}'G_{\mathfrak{N}}\{G_{\mathfrak{N}}'P_{\mathfrak{L}}G_{\mathfrak{N}}\}^{-1}G_{\mathfrak{N}}'G_{\mathfrak{L}}(G_{\mathfrak{L}}'G_{\mathfrak{L}})^{-1}y_{\mathfrak{L}}\}$$

zu degregieren, die Matrix $G_{\mathfrak{L}}(G_{\mathfrak{L}}'G_{\mathfrak{L}})^{-1}$ wieder zur Aufteilung von Residuen zu verwenden. Erst wenn die Merkmale $\mathfrak{N}$ und $\mathfrak{L}$ unabhängig sind, kann wegen

$$(I-P_{\mathfrak{L}})G_{\mathfrak{N}}\{G_{\mathfrak{N}}'P_{\mathfrak{L}}G_{\mathfrak{N}}\}^{-1}G_{\mathfrak{N}}'G_{\mathfrak{L}}(G_{\mathfrak{L}}'G_{\mathfrak{L}})^{-1}y_{\mathfrak{L}} = (I-\frac{1}{T}\iota_T\iota_T')G_{\mathfrak{N}}\{G_{\mathfrak{N}}'\frac{1}{T}\iota_T\iota_T'G_{\mathfrak{N}}\}G_{\mathfrak{L}}'\frac{1}{T}\iota_T\iota_T'y =$$

$$(I-\frac{1}{T}\iota_T\iota_T')G_{\mathfrak{N}}(G_{\mathfrak{N}}'G_{\mathfrak{N}})^{-1}G_{\mathfrak{N}}'\frac{1}{T}\iota_T\iota_T'G_{\mathfrak{N}}(G_{\mathfrak{N}}'G_{\mathfrak{N}})^{-1}G_{\mathfrak{N}}'\frac{1}{T}\iota_T\iota_T'y = 0$$

direkt durch

$$\breve{y}_{\mathfrak{L}} = G_{\mathfrak{L}}(G_{\mathfrak{L}}'G_{\mathfrak{L}})^{-1}y_{\mathfrak{L}}$$

degregiert werden, da die in die Modellspezifikation eingebrachte a priori Information wertlos ist, denn im aggregierten Modell sind gruppenspezifische Mittelwerte nicht zu schätzen.[1)] Schließlich sei noch erwähnt, daß aufgrund der Realisationen y_{σ_1} und y_{ℓ} durch

$$\breve{y}_{\sigma_1,\ell}=G_{\sigma_1}(G_{\sigma_1}'G_{\sigma_1})^{-1}y_{\sigma_1}+(I-P_{\sigma_1})G_{\ell}\{G_{\ell}'(I-P_{\sigma_1})G_{\ell}\}^{+}\{y_{\ell}-G_{\ell}'G_{\sigma_1}(G_{\sigma_1}'G_{\sigma_1})^{-1}y_{\sigma_1}\}$$

und bei Unabhängigkeit der Merkmale und durch

$$\breve{y}_{\sigma_1,\delta}=G_{\sigma_1}(G_{\sigma_1}'G_{\sigma_1})^{-1}y_{\sigma_1}+G_{\ell}(G_{\ell}'G_{\ell})^{-1}y_{\ell}-\frac{1}{T}\iota_T\iota_T'y$$

zu degregieren ist, also auch in diesem Fall direkt auf die Realisationen y_{σ_1} und y_{δ} zurückgegriffen werden kann.

---

1) Mit $rg\ G_{\ell}'G_{\sigma_1}=rg\ G_{\ell}'\frac{1}{T}\iota_T\iota_T'G_{\sigma_1}=1<rg\ G_{\sigma_1}$ ist die Identifizierbarkeit der Struktur des ursprünglichen Modells im aggregierten Modell nicht gegeben.

5. Prognose

5.1 Spezifikation ökonometrischer Prognosemodelle

Die bisher betrachteten ökonometrischen Modelle sind entsprechend der Problemstellung durch die Berücksichtigung einer sich an die bisher nur zugrunde gelegte Referenzperiode anschließenden Prognoseperiode bzw. einer noch nicht in der Referenzmenge enthaltenen Prognosemenge ökonomischer Einheiten zu Prognosemodellen zu erweitern. So werden im Rahmen des auf dem Modell (M) basierenden Standardprognosemodells

$$
\text{(PM)}\qquad
\begin{pmatrix} y \\ y_\tau \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X \\ X_\tau \end{pmatrix}\beta + \begin{pmatrix} u \\ u_\tau \end{pmatrix};
$$

[1]

$$
E\begin{pmatrix} u \\ u_\tau \end{pmatrix} = o,\quad E\begin{pmatrix} uu' & uu_\tau' \\ u_\tau u' & u_\tau u_\tau' \end{pmatrix} = \sigma^2 \begin{pmatrix} I_T & o \\ o & I_\tau \end{pmatrix};\quad \beta \in \mathbb{R}^n,\ o<\sigma^2<\infty
$$

sowie des auf dem Modell (M') basierenden verallgemeinerten Prognosemodells

$$
\text{(PM')}\qquad
\begin{pmatrix} y \\ y_\tau \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X \\ X_\tau \end{pmatrix}\beta + \begin{pmatrix} u \\ u_\tau \end{pmatrix};
$$

$$
E\begin{pmatrix} u \\ u_\tau \end{pmatrix} = o,\quad E\begin{pmatrix} uu' & uu_\tau' \\ u_\tau u' & u_\tau u_\tau' \end{pmatrix} = \sigma^2 \begin{pmatrix} \Sigma & \Sigma_\tau \\ \Sigma_\tau & \Sigma_{\tau\tau} \end{pmatrix};\quad \beta \in \mathbb{R}^n,\ o<\sigma^2<\infty
$$

zum einen a priori Hypothesen über die Gültigkeit der Struktur und zum anderen a priori Hypothesen über die Beziehung der stochastischen Variablen der Referenzperiode (-menge) mit denen der Prognoseperiode (-menge) eingebracht, denen eine entscheidende Bedeutung bei prognostischen Ausnutzung der über die Referenzperiode (-menge) vorhandenen Informationen zukommt.[2]

---

1) Mit y_τ und u_τ seien (τx1) Vektoren bezeichnet, die die sich in der Prognoseperiode bzw. die sich bei ökonomischen Einheiten der Prognosemenge realisierenden Variablen enthalten. Durch die (τxn) Matrix X_τ seien die entsprechenden n(τx1) Vektoren der erklärenden Variablen zusammengefaßt.

2) Auf die mögliche Spezifikation eines Varianzkomponenten-Prognosemodells wird verzichtet, da sich keine besonderen, nur im Rahmen eines solchen Modells auftretenden Prognoseprobleme ergeben.

Entsprechend sind auch nur noch aggregierte Variable enthaltende Prognosemodelle zu spezifizieren. Ergeben sich die aggregierten Variablen der Prognoseperiode (-menge) durch

$$\bar{y}_\tau = g'y_\tau,\ \bar{x}_\tau' = g'X_\tau,\ \bar{u}_\tau' = g'u_\tau \quad ^{1)}$$

aus den ursprünglichen Variablen der Prognoseperiode (-menge), so wird dadurch, natürlich ein aggregiertes Modell auch für die Referenzperiode (-menge) unterstellt, zum einen das aggregierte Prognosemodell

$$(\overline{PM}) \qquad \begin{pmatrix} \bar{y} \\ \bar{y}_\tau \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \bar{X} \\ \bar{x}_\tau' \end{pmatrix} \beta + \begin{pmatrix} \bar{u} \\ \bar{u}_\tau \end{pmatrix} ;$$

$$E\begin{pmatrix} \bar{u} \\ \bar{u}_\tau \end{pmatrix} = o,\ E\begin{pmatrix} \bar{u}\bar{u}' & \bar{u}\,\bar{u}_\tau' \\ \bar{u}_\tau\bar{u}' & \bar{u}_\tau\bar{u}_\tau' \end{pmatrix} = \sigma^2 \begin{pmatrix} G'G, & o \\ o & , g'g \end{pmatrix};\ \beta \in \mathbb{R}^n,\ o<\sigma^2<\infty$$

und zum anderen das aggregierte Prognosemodell

$$(\overline{PM}') \qquad \begin{pmatrix} \bar{y} \\ \bar{y}_\tau \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \bar{X} \\ \bar{x}_\tau' \end{pmatrix} \beta + \begin{pmatrix} \bar{u} \\ \bar{u}_\tau \end{pmatrix} ;$$

$$E\begin{pmatrix} \bar{u} \\ \bar{u}_\tau \end{pmatrix} = o,\ E\begin{pmatrix} \bar{u}\bar{u}' & \bar{u}\bar{u}_\tau' \\ \bar{u}\,\bar{u}' & \bar{u}_\tau\bar{u}_\tau' \end{pmatrix} = \sigma^2 \begin{pmatrix} G'\Sigma G & G'\Sigma_\tau\, g \\ g'\Sigma_\tau'G & g'\Sigma_{\tau\tau}g \end{pmatrix};\ \beta \in \mathbb{R}^n, o<\sigma^2<\infty$$

impliziert. Denkbar ist aber auch, daß die ursprünglichen (oder aggregierten) Variablen der Referenzperiode in die aggregierten Variablen der Prognoseperiode eingehen, also von

$$\bar{y}^*_\tau = h'y + g'y_\tau,\ \bar{x}^{*\prime}_\tau = h'X + g'X_\tau,\ \bar{u}^*_\tau = h'u + g'u_\tau \quad ^{1)}$$

auszugehen ist. Daß unter diesen Umständen die Spezifikation der Kovarianzmatrizen der aggregierten Störvariablen in beiden Prognosemodellen zu korrigieren ist, braucht, da unmittelbar einzusehen, nicht erläutert zu werden.

Auf die oben untersuchten Beispiele zurückblickend ist festzustellen, daß meist die zuerst vorgeschlagene Aggregationsvorschrift heranzuziehen ist. Die Relevanz der zweiten Aggregationsvorschrift läßt sich aber auch durch Beispiele belegen.

---

1) Mit g' sei ein (1xτ) und mit h' ein (1xT) Aggregationsvektor bezeichnet, dargestellt wird somit nur die Prognose der Realisation einer einzigen aggregierten Variablen.

Denn ist etwa die dem Modell ($\bar{Z}.4$) zugrunde liegende Aggregationsvorschrift im Rahmen eines Prognosemodells anzuwenden, so wird dadurch ein aggregiertes Prognosemodell impliziert, das durch eine Korrelation zwischen den aggregierten Störvariablen von Referenz- und Prognoseperiode gekennzeichnet ist. Dasselbe gilt für ein Prognosemodell, das auf Variablen basiert, die einer Saisonbereinigung nach der Methode der gleitenden Durchschnitte unterworfen worden sind.

5.2 Prognoseschätzung

Das Prognosemodell($\overline{PM}$) zugrunde gelegt läßt sich, die Kenntnis der aggregierten Variablen $\bar{x}_\tau$ vorausgesetzt, nichts besseres tun als $\bar{y}_\tau$ durch

($\bar{S}.7$) $$\check{\bar{y}}_\tau=\bar{x}_\tau'\{\bar{X}'(G'G)^+\bar{X}\}^{-1}\bar{X}'(G'G)^+\bar{y}$$

zu schätzen, also auf die Strukturschätzung ($\bar{S}.1$) zurückzugreifen. Zu beachten ist dabei, daß für die Bestimmung der Varianz des Prognosefehlers

($\bar{S}.8$) $$V(\bar{y}_\tau-\check{\bar{y}}_\tau)=\sigma^2\{\bar{x}_\tau'\{\bar{X}'(G'G)^+\bar{X}\}^{-1}\bar{x}_\tau+g'g\}$$

der Skalar g'g bekannt sein muß.

Im Rahmen des Prognosemodells ($\overline{PM}'$) ist neben der Strukturschätzung ($\bar{S}.'1$) auch die Residualschätzung

$$\check{\bar{u}}=\bar{y}-\bar{X}\{\bar{X}'(G'\Sigma G)^+\bar{X}\}^{-1}\bar{X}'(G'\Sigma G)^+\bar{y}$$

in die Prognoseschätzung [1]

($\bar{S}.'7$) $$\check{\bar{y}}=\bar{x}_\tau'\{\bar{X}'(G'\Sigma G)^+\bar{X}\}^+\bar{X}'(G'\Sigma G)^+\bar{y}+g'\Sigma_\tau'G(G'\Sigma G)^+\check{\bar{u}}$$

einzubringen. Als Varianz des mit dieser Schätzung verbundenen Prognosefehlers ergibt sich

($\bar{S}.'8$) $$V(\bar{y}_\tau-\check{\bar{y}}_\tau)=\sigma^2\{(\bar{x}_\tau-\bar{X}'(G'\Sigma G)^+G'\Sigma_\tau g)'\{\bar{X}'(G'\Sigma G)^+\bar{X}\}^{-1}(\bar{x}_\tau-\bar{X}'(G'\Sigma G)^+G'\Sigma_\tau g)$$
$$+g'\{\Sigma_{\tau\tau}-\Sigma_\tau'G(G'\Sigma G)^+G'\Sigma_\tau\}g\}$$

---

1) vgl.A.S.Goldberger (1962) Seite 369-375 oder für die Darstellung eines allgemeineren Prognoseproblems H. Theil (1971) Seite 288

Entsprechend ist nun vorzugehen, wenn den aggregierten Variablen der Prognose die zweite Aggregationsvorschrift zugrunde liegt. So ist, um nur einen Fall darzustellen, wenn man von dem Standardprognosemodell als ursprünglichem Modell ausgeht, die Variable $\bar{y}_\tau$ durch

$$\check{\bar{y}}_\tau = \bar{x}_\tau' \{\bar{X}'(G'G)^+\bar{X}\}^{-1}\bar{X}'(G'G)^+\bar{y} + h'G(G'G)^+\check{\bar{u}}$$

mit

$$\check{\bar{u}} = \bar{y} - \bar{X}\{\bar{X}'(G'G)^+\bar{X}\}^{-1}\bar{X}'(G'G)^+\bar{y}$$

und einer Prognosefehlervarianz

$$V(\bar{y}_\tau - \check{\bar{y}}_\tau) = \sigma^2\{(\bar{x}_\tau - \bar{X}'(G'G)^+G'h)'\{\bar{X}'(G'G)^+\bar{X}\}^{-1}(\bar{x}_\tau - \bar{X}'(G'G)^+G'h)$$

$$+ g'g + h'\{I - P_G\}h\ \}$$

zu schätzen.

6. Zusammenfassung und Erweiterung

Es hat sich gezeigt, daß, sofern von einem Modell mit ursprünglichen Variablen zu einem nur noch aggregierte Variable enthaltenden Modell überzugehen ist und dieser Übergang nicht durch unlösbare Spezifikationsprobleme unmöglich gemacht wird, bei der Schätzung der E-Struktur keine unüberwindbaren Hindernisse auftreten. Um die dann notwendige verallgemeinerte KQ-Schätzung der E-Struktur durchführen zu können, wird neben dem natürlich vorhandenen Wissen um die aggregierten Daten $(\bar{y},\bar{X})$ nur die Kenntnis der Kovarianzmatrix der aggregierten Störvariablen benötigt, die oft auch dann gegeben ist, wenn die Aggregationsmatrix selbst unbekannt ist. Wenn diese Information jedoch fehlt, so ist sie durch geeignete, von dem Wissen über die Aggregation ausgehende Hypothesen, man denke etwa an die Abhängigkeit bzw. Unabhängigkeit von Gruppierungsmerkmalen, zu ersetzen.

Auch bei der Schätzung der V-Struktur ergeben sich keine unlösbaren Probleme. Als besonders bemerkenswert ist dabei hervorzuheben, daß die Schätzung von Varianzkomponenten bei Vertauschbarkeit der zur Aggregation gehörenden Projektionsmatrix P_G mit den Hauptidempotenten Ω_i der Kovarianzmatrix der ursprünglichen Störvariablen, eine, wie durch die Beispiele des Abschnitts 3.2.1. belegt, nicht gerade seltene Situation, besonders einfach durchzuführen ist. Hinter dem Vorschlag, das Varianzkomponentenmodell aufzubrechen und die Varianzkomponentenschätzung im Rahmen der dabei entstehenden Teilmodelle als verallgemeinerte KQ-Schätzung durchzuführen, verbirgt sich ein Vorgehen, das einem von Balestra vorgeschlagenen Vorgehen nicht direkt entspricht, sondern vielmehr als dessen Verallgemeinerung angesehen werden kann.[1] Denn schwächt man die E-Spezifikation des Modells $(\bar{M}")$ durch die Berücksichtigung zusätzlicher erklärender Variabler $G'F_i$[2] in Analogie zu Balestras Vorgehen ab und legt der Schätzung der Varianzkomponente ω_k^2 das Modell

---

1) Vgl. P. Balestra (1973), Seite 27, und K. Reeh (1975) S. 16

2) $F_iF_i'=\Omega_i$, $F_i'F_i=I_{r_i}$, $r_i=rg\Omega_i \quad i\in\mathcal{J}$

$$\bar{y} = \bar{X}\beta + \sum_{i\in\mathfrak{J}\setminus\{k\}} G'F_i\,\theta_i + \bar{u};$$

$$E(\bar{u})=o;\ E(\bar{u}\bar{u}') = \sum_{i\in\mathfrak{J}} \omega_i^2\, G'\Omega_i G$$

$$\beta\in\mathbb{R}^n;\ \theta_i\in\mathbb{R}^{r_i}\ \forall\, i\in\mathfrak{J}\setminus\{k\};\ o<\omega_i{}^2<\infty\ \forall\, i\in\mathfrak{J}$$

zugrunde,[1] bereinigt dann die aggregierte Variable von diesen zusätzlichen Variablen nach der verallgemeinerten KQ-Methode, also von den Variablen $G'F_j$ durch eine Transformation mit

$$\{I-G'F_j\{F_j'G(\sum_{i\in\mathfrak{J}}\omega_i{}^2G'\Omega_iG)^{-1}G'F_j\}^+F_j'G(\sum_{i\in\mathfrak{J}}\omega_i{}^2G'\Omega_iG)^{-1}\} =$$

$$\{I-G'F_j\{F_j'P_GF_j\}^+F_j'G(G'G)^+\} = I-G'\Omega_jG(G'G)^+$$

und somit von allen zusätzlichen Variablen durch eine Transformation mit

$$\prod_{i\in\mathfrak{J}\setminus\{k\}}\{I-G'\Omega_iG(G'G)^+\} = G'\Omega_kG(G'G)^+$$

so ergibt sich jenes im Abschnitt 3.2.2 betrachtete Modell $(\bar{M}''_{(k)})$.

Tests sowohl der E- als auch der V-Struktur werden durch die Aggregation im allgemeinen nicht behindert, sofern natürlich die auch für die Schätzung notwendige Identifizierbarkeit gegeben ist, obwohl die Macht der Tests, wie meist auch die Effizienz der Schätzung, durch die Aggregation gesenkt wird. Einzig die Tests von umfangreichen, sich auf mehrere Parameter der E-Struktur gleichzeitig beziehenden Hypothesen im Rahmen von aus Varianzkomponentenmodellen herausgetrennten Teilmodellen können durch die Aggregation unmöglich werden.

Auf den Unterschied zwischen Degregation und Prognose sei noch einmal hingewiesen. Bei der Degregation werden ursprüngliches und aggregiertes Modell ohne zusätzliche a priori Hypothesen zu einem umfassenden, jedoch durch eine singuläre Kovarianzmatrix der Störvariablen gekennzeichneten Modell zusammenge-

---

1) Zur Interpretation sei bemerkt, daß alle "Effekte" $G'F_i$ sowohl in "fester" Form, also in der E-Struktur, als auch in "zufälliger" Form, also in der V-Struktur berücksichtigt werden, einzig die "Effekte" $G'F_k$ bleiben rein "zufällig". Vgl. für eine allgemeine Darstellung z.B. S.R. Searle (1971) Kapitel 9 und für eine spezielle Darstellung bezogen auf die Kombination von Zeitreihen von Querschnitten T.W. Wallace und A. Hussain (1969).

schnürt, daß dann der Schätzung der Realisationen der ursprünglichen Variablen, also fehlender Beobachtungen, zugrunde liegt. Natürlich geht es auch bei der Prognose um die Schätzung der Realisationen von Zufallsvariablen, dabei wird jedoch die Referenzperiode (-menge) des zugrunde liegenden ursprünglichen wie auch aggregierten Modells um eine in diesen Modellen noch nicht abgedeckte Prognoseperiode (-menge) erweitert und diese durch zusätzliche a priori Hypothesen in die bestehenden Modelle integriert. Die Lösung des Schätzproblems, und darin ist die Gemeinsamkeit von Degregation und Prognose zu sehen, ist in beiden Fällen durch die KQ-Prognose gegeben.

Wenig Beachtung wurde den Auswirkungen der Aggregation geschenkt. Jedoch allein durch die Tatsache, daß die Modellspezifikation durch die Aggregation eine Abschwächung erfährt, daß a priori Informationen und Hypothesen der Aggregation zum Opfer fallen, werden die Auswirkungen der Aggregation in allgemeinster Form beschrieben. Daß dann bei der verallgemeinerten KQ-Schätzung der E-Struktur im Rahmen etwa des aggregierten Modells ($\bar{M}$) ein Verlust an Effizienz im Vergleich zur einfachen KQ-Schätzung im Rahmen des ursprünglichen Modells (M) entsteht,[1] ist damit genauso erklärt, wie das Sinken der Macht der üblicherweise zur Anwendung kommenden F-Tests aufgrund eines zumindest nicht größeren Nicht-Zentralitätsparameters. Schließlich wird durch die Modelle ($\tilde{M}_r$)[2] deutlich, daß der durch die Aggregation implizierten Multikollinearität Beachtung zu schenken ist, daß es nicht genügt, wenn es darum geht, einen Teil β_1 der Parameter $\beta'=(\beta'_1,\beta'_2)$ möglichst effizient zu schätzen, darauf zu achten, daß bei der Aggregation des entsprechenden Teils X_1 der erklärenden Variablen $X=(X_1,X_2)$ möglichst wenig erklärende Varianz verloren geht, daß man diese Aufmerksamkeit vielmehr den von den Variablen X_2 bereinigten Variablen X_1 widmen muß.

---

1) Die Differenz $(X'P_GX)^{-1}-(X'X)^{-1}$ ist positiv semidefinit. Lineare Funktionen $c'\beta$ werden nur dann nicht effizient geschätzt, wenn es keinen Vektor d aus $\mathcal{M}(X)\cap\mathcal{M}(G)$ gibt, so daß $c=X'd$ gilt.

2) Vgl. Abschnitt 2.3

Abschließend sei noch auf mögliche Erweiterungen hingewiesen. So ist es von Interesse, auch stochastische erklärende Variable zuzulassen. Dann jedoch wird man nicht umhin kommen, die ursprünglichen Variablen sowohl im Rahmen des ursprünglichen als auch des aggregierten Modells als Bedingung zu setzen, eine Reduktion auf gegebene aggregierte Variable im Rahmen des aggregierten Modells ist durch das ursprüngliche Modell im allgemeinen nicht zu rechtfertigen. Die Berücksichtigung von stochastischen Aggregationsmatrizen, insbesondere von Bedeutung bei gewogenen Summationen und Mittelungen mit sich aus ökonomischen Variablen ergebenden Gewichten, verursacht jedoch weit mehr Probleme, die von Feige und Watts[1)] zumindest schon einmal angedeutet worden sind. Bei der Behandlung dieser Probleme wird dann aber das Spezifikationsproblem, im Rahmen dieser Arbeit weitgehend ausgeklammert, in den Mittelpunkt rücken.

---

1) Vgl. E.L. Feige und H.W. Watts (1972), insbesondere Seite 345-6.

Literaturverzeichnis

Balestra, P.: Best quadratic unbiased estimators of the variance-covariance matrix in normal regression, Journal of Econometrics 1, (1973), S. 17-28.

Chow, G.C. und Lin, A.: Best linear unbiased interpolation, distribution and extrapolation of time-series, The Review of Economics and Statistics 53, (1971), S. 335-41.

Cramer, J.S.: Efficient grouping, regression and correlation in Engel curve analysis, Journal of the American Statistical Association 59, (1964), S. 233-25o.

Cramer, J.S.: Empirical Econometrics, Amsterdam, (1969).

Feige, E.L. und Watts, H.W.: An investigation of the consequences of partial aggregation of microeconomic data, Econometrica 4o, (1972), S. 343-6o.

Flaskämper, P.: Allgemeine Statistik, Hamburg,(1962) Berichtigter Nachdruck der zweiten durchgesehenen und ergänzten Auflage

Friedman, M.: The interpolation of time series by related series, Journal of the American Statistical Association 57, (1962), S. 729-57.

Goldberger, A.S.: Best linear unbiased prediction in the generalized linear regression model, Journal of the American Statistical Association 57, (1962), S. 369-375.

Haitovsky, Y.: Unbiased multiple regression coefficients estimated from one-way classification tables when the cross classifications are unknown, Journal of the American Statistical Association 61, (1966), S. 72o-8.

Haitovsky, Y.: Regression Estimation from Grouped Observations, London, (1973).

Johnston, J.: Econometric Methods, New York, (1972), 2. Auflage.

Malinvaud, E.: Statistical Methods of Econometrics, Amsterdam (1966).

Prais, S.J. und Aitchison, J.: The grouping of observations in regression analysis, Revue de l'Institut International de Statistique 22, (1954), S. 1-22.

Pringle, R.M. und Rayner, A.A.: Generalized Inverse Matrices with Applications to Statistics, London, (1971).

Rao, C.R.: Linear Statistical Inference and Its Applications, New York, (1973), 2. Auflage.

Rao, C.R.: Estimation of variance and covariance components - MINQUE theory, Journal of Multivariate Analysis 1, (1971,1), S. 257-75.

Rao, C.R.: Minimum variance quodratic unbiased estimation of variance components, Journal of Multivariate Analysis 1, (1971,2), S. 445-56.

Rao, C.R. und Mitra, S.K.: Generalized Inverse of Matrices and Its Applications, New York, (1971).

Reeh, K.: Regression with grouped variables, unpublished paper presented at the Winter Symposium of the Econometric Society, Geneva, (1975).

Schneeweiß, H.: Ökonometrie, Würzburg, (1971).

Schönfeld, P.: Methoden der Ökonometrie, Band I, Berlin, (1969).

Searle, S.R.: Linear Models, New York, (1971).

Seber, G.A.F.: The Linear Hypothesis: A General Theory, London, (1966).

Theil, H.: Principles of Econometrics, Amsterdam, (1971).

Wallace, T.W. und Hussain, A.: The use of error components models in combining cross-section with time-series data, Econometrica 37, (1969), S. 55-72.

Zellner, A. und Montmarquette, C.: A study of some aspects of temporal aggregation problems in econometric analysis, The Revue of Economics and Statistics (53), S. 335-41.